LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

3. ANÁLISIS DE FUNCIONES CON ASISTENTES MATEMÁTICOS

MAURICIO CONTRERAS

DIBUJANDO GRÁFICAS

Introducción

Una de las mayores dificultades que presentan los estudiantes a la hora de representar gráficamente funciones es la de no disponer habitualmente de herramientas tecnológicas adecuadas que faciliten la tarea. La obtención de una tabla de valores, el cálculo de algunos puntos destacados, la elección de la escala adecuada, el dibujo de la gráfica punto a punto, son cuestiones que a veces se complican bastante. Hasta el punto de que, no con poca frecuencia, estudiantes competentes son capaces de hacer un estudio local de una función –incluso con ayuda de las derivadas– y, en cambio, no consiguen plasmar la gráfica en el papel. Todo esto se agrava más cuando se trata de dibujar gráficas de funciones definidas a intervalos.

Afortunadamente, en la actualidad disponemos de instrumentos tecnológicos que nos pueden ayudar en la tarea, entre ellos el ordenador. El uso de estas herramientas facilita el proceso de identificación de las expresiones algebraicas con las representaciones gráficas y sería lamentable no aprovechar sus posibilidades en el aprendizaje. Además, el uso de estas tecnologías plantea nuevos e interesantes problemas: ¿cuáles deben ser las dimensiones de la ventana gráfica para visualizar la parte interesante de la gráfica?. ¿qué expresión analítica puede corresponder a una gráfica que se muestra en pantalla, si tenemos en cuenta el rango y la escala?.

En lo que sigue vamos a ver las posibilidades que plantean FUNCGRAF y DERIVE para representar gráficas de funciones elementales, estudiar sus propiedades, componer y operar funciones y analizar funciones definidas a intervalos.

1. Propiedades locales y globales de las gráficas

- **Dibujando gráficas**

El programa FUNCIONS I GRÀFICS está especialmente diseñado para dibujar gráficas de funciones. Veamos su utilidad en algunos casos concretos.

Haz clic en **Inicio / Programas / Aplicacions PIE / Funcions i Gràfics**. Observa que en la ventana del programa aparece una barra con los siguientes menús: **Arxiu**, **Edició**, **Visualitzar**, **Escala–zoom**, **Funcions**, **Punts**, **Ajuda**. Con el ratón efectúa un paseo por los menús y observa las distintas opciones.

La ventana presenta también una barra de herramientas con los siguientes botones:

- **Esborrar pantalla**
- **Esborrar funció**
- **Aspecte i colors**
- **Escala: extrems inicials**
- **Zooom in: marcar la zona rectangular**
- **Zoom out: centre el de la pantalla**
- **Funcions definides a intervals**
- **Composició de funcions**
- **Imatges d’x mitjançant una funció**
- **Portar gràfics al porta–retalls**
- **Ajuda**

Ejemplo 1.- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 0{,}5x^3 - 4x + 7$. Halla las imágenes de los puntos x = 2, x = 3 y x = –1. Halla las antimágenes del punto y = 10.

En la caja de introducción de funciones escribe la fórmula de la función: $0{,}5x{}^{\wedge}3-4x+7$ y pulsa ENTER. Observa la gráfica obtenida. Para hallar la imagen de x=2, haz clic en el botón **Imatges d'x mitjançant una funció**. En la caja **x** del cuadro de diálogo escribe 2 y pulsa ENTER. Observa que en la caja **f(x)** se muestra la imagen de x y en el gráfico se señala el punto correspondiente. Comprueba también que la imagen de 3 es 8,5 y que la imagen de –1 es 10,5. En todo momento puedes hacer clic en los botones de flecha ← y → para obtener las coordenadas de otros puntos del gráfico.

Para hallar la antimagen de y=10, selecciona **Antimages** en la lista desplegable del cuadro de diálogo **Punts**. En la caja **f(x)** introduce el valor 10 y pulsa ENTER. Observa que en la caja **x** aparece el valor de la antimagen, –2,329 y se señala el punto sobre el gráfico. Sin embargo, hay dos valores más de x con la misma imagen. Para obtenerlos hay que hacer clic en los botones de flecha ← →. De esta forma, observa que las antimágenes de 10 son –2,329, –0,819 y 3,147.

Ejemplo 2.- Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$. ¿Cuál es la imagen de x=3?. ¿Cuál es la antimagen de y=1?. ¿Cuáles son las asíntotas de la función?. ¿Cuál es el dominio?. ¿Cuál es el conjunto imagen?.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En la caja de introducción de funciones, escribe la fórmula de la función: $(x+2)/(x-3)$ y pulsa ENTER. Observa la gráfica obtenida.

Para hallar la imagen de x=3 procedemos como antes. Observa que ahora el programa no da una respuesta en la caja f(x), únicamente dibuja una recta vertical y nos invita a que desplacemos dicha recta con el ratón, si queremos. Evidentemente, la imagen de x=3 no existe. La recta x=3 es una asíntota vertical y el dominio de la función no contiene a x=3. Es decir, $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$. La función es discontinua en x=3.

Para hallar la antimagen de y=1 procedemos igual que antes. De nuevo la caja x aparece en blanco y se dibuja sobre el gráfico una recta horizontal por y=1, invitándonos el programa a desplazarla. Evidentemente, la antimagen de y=1 no existe. La recta y=1 es una asíntota horizontal y el conjunto imagen de la función no contiene a y=1. Es decir, $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

- **Funciones polinómicas**

Ejemplo 3.- Dibujando rectas. Pendiente y ordenada en el origen.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En la caja de introducción de funciones escribe x y pulsa ENTER. Observa que se dibuja la gráfica de la función y = x. En el menú **Visualitzar**, desactiva la opción **Esborrar en representar nova funció**.

Haz clic en el botón **Composició de funcions** y selecciona la opción **x→x+b**. Abajo, en la caja **b**, desplaza el cuadro, haz clic en los botones de flecha, [◂] o [▸], o teclea directamente sobre la caja, hasta que el valor de **b** sea 2. Haz clic en el botón **Dibuixar** y comprueba que se dibuja la gráfica de la función y = x + 2. Modifica el valor de **b** para que sea igual a 3 y haz clic en **Dibuixar**. Comprueba que se dibuja la función y = x + 3. Observa que las tres rectas son paralelas y tienen la misma pendiente. Has obtenido un **haz de rectas paralelas**.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. Dibuja de nuevo la gráfica de la función y = x. En el cuadro de diálogo **Composició de funcions**, selecciona la opción **x→a*x**. Abajo, en la caja **a**, desplaza el cuadro, pulsa los botones [◂] o [▸], o teclea directamente hasta que el valor de **a** sea 2. Haz clic en **Dibuixar**. Observa que se dibuja la gráfica de y = 2 x. Modifica de nuevo el valor de **a**, para que valga 3 y haz clic en **Dibuixar**. Aparece la gráfica de y = 3 x. Usa el mismo procedimiento para dibujar la función y = 4 x. Observa que conforme aumenta la pendiente, aumenta la inclinación de la recta. Modifica el valor de **a** para que sea igual a –1. Usa la misma técnica para dibujar la recta y = –2 x. Has obtenido un **haz de rectas** que pasan por el origen de coordenadas.

Ejemplo 4.– Dibujando parábolas. Traslaciones, dilataciones, contracciones.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En la caja de introducción de funciones escribe x y pulsa ENTER. Observa que se dibuja la gráfica de la función $y = x^2$. En el menú **Visualitzar**, desactiva la opción **Esborrar en representar nova funció**.

Haz clic en el botón **Composició de funcions** y selecciona la opción **x→x+b**. Abajo, en la caja **b**, desplaza el cuadro, haz clic en los botones de flecha, [◂] o [▸], o teclea directamente sobre la caja, hasta que el valor de **b** sea –2. Haz clic en el botón **Dibuixar** y comprueba que se dibuja la gráfica de la función $y = (x-2)^2$. Modifica el valor de **b** para que sea igual a 3 y haz clic en **Dibuixar**. Comprueba que se dibuja la función $y = (x+3)^2$. Observa que las dos últimas parábolas se obtienen trasladando la gráfica de $y = x^2$ según los vectores (2, 0) y (–3, 0).

Haz clic en el botón **Esborrar**. Dibuja de nuevo la gráfica de la función $y = x^2$. Para ello haz cic en **x → x** y en **f(x) → f(x)** y haz clic en el botón **Dibuixar**. A continuación selecciona la opción **f(x) → f(x) + d**. Abajo, en la caja **d**, desplaza el cuadro, pulsa los botones [◂] o [▸], o teclea directamente hasta que el valor de **a** sea 3. Haz clic en **Dibuixar**. Observa que se dibuja la gráfica de $y = x^2 + 3$. Modifica de nuevo el valor de **a**, para que valga –3 y haz clic en **Dibuixar**. Aparece la gráfica de $y = x^2 - 3$. Observa que las dos parábolas se obtienen trasladando la gráfica de $y = x^2$ según los vectores (0, 3) y (0, –3).

Haz clic en el botón **Esborrar**. Dibuja de nuevo la gráfica de la función $y = x^2$, haciendo clic en las opciones **x → x** y **f(x) → f(x)**. En el cuadro de diálogo **Composició de funcions**, selecciona la opción **x → a*x**. Abajo, en la caja **a**, desplaza el cuadro, pulsa los botones [◂] o [▸], o teclea directamente hasta que el valor de **a** sea 2. Haz clic en **Dibuixar**. Observa que se dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Modifica de nuevo el valor de **a**, para que valga 0,5 y haz clic en **Dibuixar**. Aparece la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$. Observa que la primera es una contracción de $y = x^2$, mientras que la segunda es una dilatación de $y = x^2$. Usa el mismo procedimiento para dibujar la función $y = -x^2$. Obtendrás una parábola simétrica de la $y = x^2$ respecto del eje OX.

Ejemplo 5.– El departamento de marketing de una empresa estima que los ingresos mensuales que producirá el lanzamiento de un nuevo detergente vendrán dados, en decenas de euros, por la expresión: $\mathbf{I(x) = 200 + 6x^2 - \frac{x^3}{3}}$, donde el tiempo x viene expresado en meses a partir del lanzamiento al mercado del detergente.

a) Dibuja la gráfica de la función.

b) ¿Durante qué período de tiempo aumentan los ingresos?. ¿Durante qué período disminuyen?. ¿En qué momento son máximos los ingresos?.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla** y cierra la ventana **Composició de funcions**. En la caja de introducción de funciones escribe la expresión de los ingresos: $200 + 6x\verb|^|2 - x\verb|^|3/3$ y pulsa ENTER. Observa que, aparentemente la gráfica no se ha dibujado. Sin embargo, no es así. En el menú **Visualitzar**, selecciona la opción **Configurar elements gràfics de l'escala**. En la siguiente ventana, haz clic en el botón **Fixar extrems**. En la caja **Esquerre Eix Y** introduce el valor 10 y en la caja **Dret Eix Y** introduce el valor 500. Haz clic en el botón **D'accord** y observa cómo aparece la gráfica.

En el menú **Visualitzar**, selecciona el comando **Visualitzar coordenades cursor (x, y)**. Desplaza el ratón hasta alcanzar el mínimo de la función. Al hacerlo verás como aparecen en pantalla las coordenadas del mínimo. Haz lo mismo para visualizar las coordenadas del máximo. Comprueba que antes del lanzamiento del detergente, los ingresos eran decrecientes, el ingreso mínimo es de 200 decenas de euros y se produce en el momento del lanzamiento del producto, desde ese momento el ingreso es creciente, el ingreso máximo es de 489 decenas de euros y se obtiene a los12 meses del lanzamiento y desde ese momento, los ingresos vuelven a bajar. ¿En qué momento se anulan los ingresos?.

Ejemplo 6.– Compara las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$, $y = x^{10}$

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En el menú **Escala–zoom**, selecciona la opción **Fixar extrems**. Introduce los siguientes valores: Esquerre Eix X=–2, Dret Eix X=2, Esquerre Eix Y=–2, Dret Eix Y = 2. En el menú **Visualitzar** comprueba que está desactivada la opción **Esborrar en representar nova funció**.

Introduce la fórmula de la primera función: x^2 y pulsa ENTER.
Introduce la fórmula de la segunda función: x^4 y pulsa ENTER.
Introduce la fórmula de la primera función: x^6 y pulsa ENTER.
Introduce la fórmula de la segunda función: x^8 y pulsa ENTER.
Introduce la fórmula de la primera función: x^10 y pulsa ENTER.

Observa que todas las gráficas pasan por los puntos (–1, 1) y (1, 1), pero que hay grandes diferencias entre ellas.

Utiliza el mismo procedimiento para comparar las gráficas de las funciones $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$.

- **Consultando ejemplos de funciones**

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En el menú **Visualitzar** activa la opción **Esborrar en representar nova funció**. En el menú **Funcions**, selecciona el submenú **Exemples** y elige la opción **Funcions elementals**. En la ventana que aparece haz clic en cada una de las funciones de la lista para mostrar la gráfica correspondiente.

ACTIVIDADES

De forma similar a como lo hemos hecho con las funciones polinómicas, podemos utilizar el programa FUNCIONS I GRÀFICS para representar funciones racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y estudiar sus propiedades, como la existencia o no de asíntotas, continuidad, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Veamos algunos ejemplos.

- **RACIONALES**

Utilizando el programa Funcions i Gràfics, dibuja las gráficas de las siguientes funciones, estudiando los intervalos de crecimiento, extremos y asíntotas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ b) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4}$ c) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{x^2 + 1}$

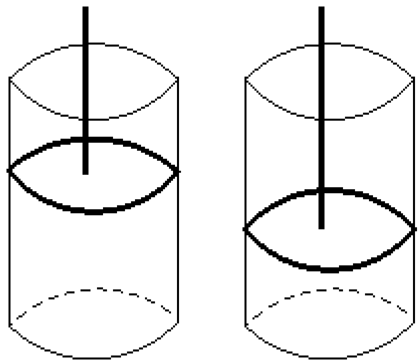
d) $m(x) = \dfrac{x^4 - 4x + 2}{5x^2 + 8}$ e) $n(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x - 4}$ f) $p(x) = \dfrac{(x - 3) \cdot (x^2 + 2x - 8)}{2x^2 - 14x + 24}$

En cada caso define la zona de visualización más adecuada y, si es preciso, utiliza los botones de zoom **[in +]** y **[out–].** Estos botones se pueden configurar en el menú **Escala–zoom**, seleccionando el comando **Configuració escala–zoom**. En la ventana correspondiente podemos definir un factor de zoom e indicar el número máximo de funciones que se redibujarán al modificar la escala. También podemos indicar si debe mantenerse o no la proporcionalidad entre las coordenadas x e y.

Para hacer una ampliación (zoom in), podemos utilizar cuatro técnicas diferentes:

- ⇨ Marcar extrems zona rectangular
- ⇨ Marcar centre i vèrtex zona rectangular
- ⇨ Marcar només el centre del zoom
- ⇨ Automàtic. Centre el de la pantalla

- **UN ÉMBOLO**



Si se tiene un cilindro en cuyo interior hay un cierto número de gramos de aire, éste ocupará más o menos volumen según que la presión ejercida por el émbolo sea menor o mayor.

Manteniendo la temperatura a 0º C se sabe que la relación existente entre la presión P (medida en atmósferas) y el volumen V ocupado por el aire (medido en litros) es: $V = \frac{22,4}{P}$.

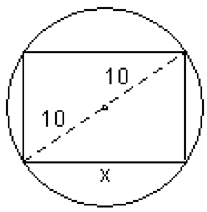
a) Estudia la variación del volumen cuando aumenta o disminuye la presión. ¿Qué ocurre con V cuando P se hace grande y positiva?. ¿Y cuando P se hace grande y negativa?.

b) Dibuja la gráfica de la función f**:** P→V dada anteriormente.

c) ¿Cuál es el dominio de esta función?. ¿Puede ser P = 0?. ¿Puede ser P negativa?.

- **RECTÁNGULO INSCRITO**

En una circunferencia de radio 10 m se inscribe un rectángulo. Expresa el área del rectángulo en función del lado x de la base. Utiliza Funcions i Gràfics para dibujar la gráfica de dicha función. ¿Cuál es su dominio?.



- **RAÍCES**

Compara las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$. ¿Qué tienen en común y qué las diferencia?.

- **OSCILACIONES**

Representa gráficamente las funciones $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$. Investiga en cada una cuál es la amplitud y el período, si es posible.

- **RESPIRACIÓN**

Una persona en reposo inspira y espira 0,5 litros de aire cada 4 segundos. Al final de una espiración, le quedan todavía 2,25 litros de aire de reserva en los pulmones. El volumen de aire en sus pulmones, t segundos después de una espiración, es: $V = 2{,}5 - 0{,}25 \cos \dfrac{\pi \cdot t}{2}$.

a) Dibuja la gráfica de esta función.

b) Un animal cuya respiración viene expresada por la fórmula $V = 1{,}2 - 0{,}2 \cos \dfrac{\pi \cdot t}{3}$, con V en litros y t en segundos, ¿cada cuánto tiempo inspira aire?. ¿Cuáles son el volumen máximo y mínimo de aire en sus pulmones?. ¿En qué fase de la respiración se encuentra cuando t=12?.

- **POBLACIÓN**

Un país tiene una población de 110 millones de habitantes y se espera que se duplique en 25 años. Estima su población dentro de 40 años. Halla la población que predice ese modelo para dentro de 60 años.

- **DECIBELIOS**

El oído humano percibe un rango enorme de intensidades sonoras I (medidas en vatios/m^2), entre un umbral $I_o = 10^{-12}$ y sonidos del orden de billones de veces más intensos, como muestra la siguiente tabla:

Intensidad aproximada de algunos sonidos	vatios / m^2	db
Umbral de audición	10^{-12}	0
Susurros	$5 \cdot 10^{-10}$	27
Conversación normal	$3 \cdot 10^{-6}$	
Tráfico muy intenso	$8 \cdot 10^{-4}$	89
Martillo neumático	$3 \cdot 10^{-3}$	95
Umbral del dolor	10^{0}	
Reactor (postcombustión)	$8 \cdot 10^{2}$	149

Pero al crecer la intensidad geométricamente, la sensación percibida lo hace de forma aproximadamente aritmética. Por eso se introdujo la escala de medida en belios y decibelios (en honor a Bell, el inventor del teléfono), en la cual un sonido de intensidad I tiene un nivel de intensidad de $D = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_o}$ decibelios. Así, el sonido umbral I_o corresponde a 0 decibelios y un tráfico muy intenso corresponde a: $D = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_o} = 10 \cdot \log \dfrac{8 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 89$ decibelios.

a) Calcula el nivel de decibelios de una conversación normal, cuya intensidad es de 3×10^{-6} vatios / m^2.

b) Halla el nivel de decibelios de un sonido cuya intensidad sea del umbral del dolor.

- **CARBONO 14**

En la datación de restos arqueológicos se utiliza el carbono 14, que se desintegra de forma que una cantidad inicial Q_o se convierte al cabo de t años en $Q = Q_o \cdot e^{-0{,}000121 \cdot t}$. Dibuja la gráfica de la función. Calcula, a partir de esa información, la semivida del carbono 14.

2. Operaciones con funciones

Con el programa FUNCIONS I GRÀFICS podemos hacer composiciones de funciones con suma facilidad. Para ello hay que hacer clic en el botón **Composició de funcions** y manejar adecuadamente las opciones que aparecen en la ventana correspondiente. Vamos a ver algunos ejemplos relativos a las funciones trigonométricas.

- **<u>OSCILACIONES</u>**

Ejemplo 1.– Representa gráficamente las funciones $y = \text{sen } x$, $y = \text{sen } 2x$, $y = \text{sen } 0.5\,x$

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. Haz clic en el botón **Extrems inicials**. En el menú **Visualitzar** comprueba que está desactivada la opción **Esborrar en representar nova funció**. Introduce la fórmula de la primera función: sin(x) y pulsa ENTER. Aparece la gráfica de la función $y = \text{sen } x$. Haz clic en el botón **Composició de funcions** y, en la siguiente ventana selecciona la opción **x → a*x**. Introduce 2 como valor de **a** y haz clic en **Dibuixar**. Observa que se dibuja la gráfica de la función $y = \text{sen } 2x$. Modifica el valor de **a** para que sea igual a 0.5 y haz clic en **Dibuixar**. Observa que el período de $y = \text{sen } 0.5\,x$ es el doble del período de $y = \text{sen } x$, mientras que el período de ésta es el doble que el de $y = \text{sen } 2x$.

Ejemplo 2.– Representa gráficamente las funciones $y = \text{sen } x$, $y = 2\,\text{sen } x$, $y = 0.5\,\text{sen } x$

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. Mantén desactivada la opción **Esborrar en representar nova funció** del menú **Visualitzar**. Introduce la fórmula de la primera función: sin(x) y pulsa ENTER. Aparece la gráfica de la función $y = \text{sen } x$. En la ventana **Composició de funcions** selecciona la opción **f(x) → c*f(x)**. Introduce 2 como valor de **c** y haz clic en **Dibuixar**. Observa que se dibuja la gráfica de la función $y = 2\,\text{sen } x$. Modifica el valor de **c** para que sea igual a 0.5 y haz clic en **Dibuixar**. Observa que las amplitudes (alturas máximas) de las tres funciones son 1, 2 y 0.5, respectivamente.

Ejemplo 3.- Representa gráficamente las funciones $y = \text{sen } 4x + \text{sen } 4.5\,x$ (un piano) , $y = \cos\, x + 0.7\,\text{sen } x + 0.2\,\text{sen } 4x - 0.3\,\cos\, 5x + 0.1\,\text{sen } 8x$ (nota musical).

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. Activa la opción **Esborrar en representar nova funció** del menú **Visualitzar**. Introduce la fórmula de la primera función y pulsa ENTER. Halla el período de forma aproximada.

Introduce la fórmula de la segunda función y pulsa ENTER. Intenta hallar el período de manera aproximada. El matemático francés Fourier pretendía imitar cualquier gráfica utilizando sumas más o menos largas de senos y cosenos.

- **Consultando ejemplos de funciones**

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En el menú **Visualitzar** deactiva la opción **Esborrar en representar nova funció**. En el menú **Funcions**, selecciona el submenú **Exemples** y elige la opción **Funcions amb paràmetres**. En la ventana que aparece haz clic en la función $\mathbf{sin(x+u)+u}$ de la lista para mostrar la gráfica correspondiente. Utiliza el cuadro de desplazamiento para modificar los valores de u y observa el resultado.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En la ventana **Exemples**, selecciona la función $\mathbf{sin(ux)+sin(vx)}$. Utilizando las flechas de desplazamiento, modifica los valores de **u** y **v** y observa las gráficas que resultan.

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En la ventana **Exemples**, selecciona la función $\mathbf{u * x\char`^ 2 + v * x + w}$. Utilizando las flechas de desplazamiento, modifica los valores de **u**, **v** y **w**. Observa las gráficas obtenidas.

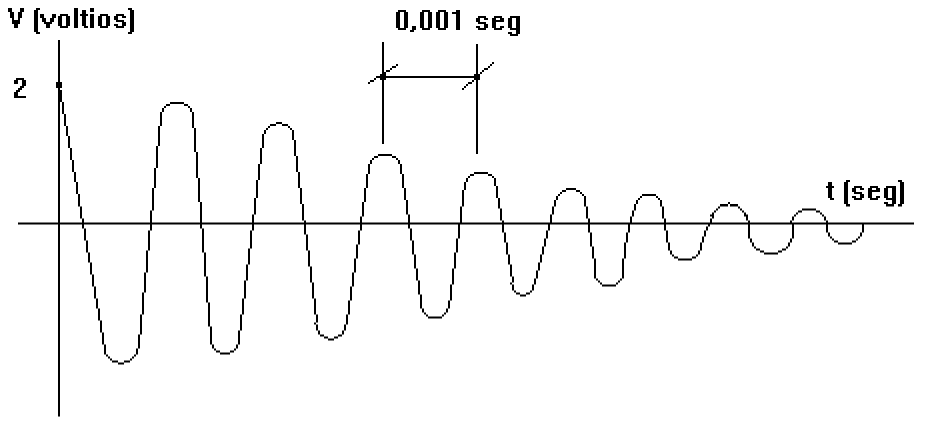
ACTIVIDADES

- **COMPARACIONES**

Compara las gráficas de las funciones $f(x) = (\text{sen } x) \cdot (\cos x)$ y $g(x) = \text{sen } 2x$. ¿Qué propiedades tienen dichas gráficas?.

- **OSCILACIONES AMORTIGUADAS**

La siguiente figura representa la variación que va sufriendo el voltaje en un circuito de corriente alterna. Escribe una función cuya gráfica sea análoga a la de esa oscilación "amortiguada".



3. Funciones definidas a intervalos

- **A TROZOS CON FUNCIONS I GRÀFICS**

Consultando ejemplos de funciones

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En el menú **Visualitzar** activa la opción **Esborrar en representar nova funció**. En el menú **Funcions**, selecciona el submenú **Exemples** y elige la opción **Funcions a intervals**. En la ventana que aparece haz clic en cada una de las funciones de la lista para mostrar la gráfica correspondiente. Haz clic en el botón **Veure la definició** para ver la expresión algebraica de la función.

Ejemplo.– Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \le 1 \\ x^2+2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **. Estudia su continuidad en el punto x = 1.**

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. Haz clic en el botón **Funcions definides a intervals**. En el siguiente cuadro de diálogo, observa que podemos definir hasta cinco funciones diferentes. Estando activada la opción **FT1(x),** introduce en la primera caja de la primera fila la definición de la función en el primer intervalo: x+1. En el segundo panel de desigualdades de dicha fila, selecciona **<=**, y en la última caja de texto de dicha fila, escribe 1. En la primera caja de la segunda fila introduce la definición de la función en el segundo intervalo: $x^\wedge 2+2$. En la siguiente caja de texto introduce un 1, para completar la desigualdad 1<x. Pulsa ENTER y aparecerá la gráfica de la función. Observa que la función es discontinua en el punto x = 1.

ACTIVIDADES

- **GRÁFICAS**

1) Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x-2, & \text{si } x\le 2 \\ x^2-4x, & \text{si } x>2 \end{cases}$. Estudia su continuidad en el punto x = 2.

2) Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{si } x<2 \\ x-1, & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$. ¿Es continua esta función en el punto x = 2 ?.

3) Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & \text{si } x<0 \\ -2, & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2}, & \text{si } x>0 \end{cases}$. Estudia la continuidad de esta función.

- **MAS FUNCIONES**

Dibuja las gráficas de las siguientes funciones y estudia su continuidad:

a) $y=\begin{cases} 2x, & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 2-x, & \text{si } 1<x\le 2 \end{cases}$

b) $y=\begin{cases} x^2, & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 4-x, & \text{si } 2<x\le 4 \end{cases}$

c) $y=\begin{cases} 2-x^2, \text{ si } x\le 0 \\ 2, \text{ si } 0<x\le 2 \\ 2x-2, \text{ si } x>2 \end{cases}$

d) $y=\begin{cases} 0, \text{ si } x\le 0 \\ x^2, \text{ si } 0<x\le 3 \\ 6+x, \text{ si } x\ge 3 \end{cases}$

- **DEPORTE**

El rendimiento físico ante determinado esfuerzo muscular (evaluado en una escala de 0 a 100) de cierto deportista de élite durante un tiempo de 60 minutos, viene dado a través de la función:

$$R(t)=\begin{cases} -t\cdot(t-20) & \text{si } 0\le t<15 \\ 75 & \text{si } 15\le t<30 \\ 100-(5/6)\cdot t & \text{si } 30\le t<60 \end{cases}$$

Representa dicha función e Interpreta la gráfica obtenida.

4. Funciones valor absoluto

La función valor absoluto de x se define de la siguiente forma: $|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x\ge 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$. Por ejemplo, $|3|=3$, $|-3|=3$. También podemos utilizar el programa FUNCIONS I GRÀFICS para dibujar gráficas de funciones valor absoluto. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.– Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\left|x^3-3x\right|$

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. Activa la opción **Esborrar en representar nova funció** del menú **Visualitzar**. Introduce la fórmula de la función: **x^3 – 3x** y pulsa ENTER. Para dibujar la gráfica del valor absoluto de esta función, haz clic en el botón **Composició de funcions** y en la siguiente ventana selecciona la opción **f(x)→|f(x)|** y haz clic en el botón **Dibuixar**. Compara las gráficas de f(x) y de |f(x)|.

Ejemplo 2.– Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |\text{sen } 3x|$

Haz clic en el botón **Esborrar pantalla**. En la caja de texto introduce la fórmula de la función: **abs(sin (x))** y pulsa ENTER. Observa el resultado.

ACTIVIDADES

- **VALOR ABSOLUTO 1**

  Representa la función $f(x) = |x^2 - 4|$. Compárala con la gráfica de $y = x^2 - 4$.

- **VALOR ABSOLUTO 2**

  Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |\tan x^2|$. Compárala con la gráfica de $y = \tan x^2$

GRÁFICAS Y SUCESIONES CON DERIVE

El programa DERIVE PARA WINDOWS está especialmente diseñado para dibujar gráficas de funciones. DERIVE es un programa de cálculo simbólico, una herramienta que nos ayuda a resolver problemas y facilita el aprendizaje del álgebra. Veamos como se utiliza en casos concretos.

Haz clic en **Inicio / Programas / Derive para Windows / Derive para Windows**. Observa que se abre la ventana de Derive, que presenta una fila de menús y una barra de herramientas.

Los menús disponibles son: **Archivo**, **Edición**, **Editar(Autor)**, **Simplificar**, **Resolver**, **Cálculo**, **Definir**, **Opciones**, **Ventana**, **Ayuda**. Efectúa un paseo con el ratón por cada uno de los menús.

La barra de herramientas consta de los siguientes botones: **Nuevo**, **Abrir**, **Guardar**, **Imprimir**, **Borrar expresiones**, **Recuperar**, **Renumerar**, **Editar expresión**, **Editar un vector**, **Editar una matriz**, **Simplificar**, **Aproximar**, **Resolver**, **Sustituir variables**, **Calcular límites**, **Calcular derivadas**, **Calcular integrales**, **Calcular sumatorios**, **Calcular productos**, **Gráficos 2D**, **Gráficos 3D**. Sitúa el puntero del ratón sobre cada uno de los botones y aparecerá una pista junto con una descripción en la barra de estado.

Veamos como se puede usar DERIVE para dibujar gráficas de funciones:

1. Gráficas de funciones

- **REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CON DERIVE**

DERIVE tiene, además de la pantalla algebraica, dos ventanas más: gráficos 2D y gráficos 3D. Para abrirlas hay que utilizar el menú **Ventana** o bien hacer clic en los dos últimos botones de la barra de herramientas.

Ejemplo 1.– Representa la función $f(x) = 2x^3 - 6x$ y di si es continua, simétrica o periódica. Halla los máximos y mínimos relativos.

Haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto introduce la fórmula de la función: 2 x^3 – 6x . Haz clic en el botón **Sí**. Aparece la expresión en la ventana algebraica. Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa que la gráfica obtenida es continua en todo su dominio, es simétrica respecto del origen de coordenadas, no es periódica, tiene un máximo relativo en el punto (–1, 5) y un mínimo relativo en el punto (1, –5).

Ejemplo 2.– Representa el siguiente par de funciones y, viendo las gráficas, halla los puntos de corte: $\mathbf{y = 4x}$ **,** $\mathbf{y = 4/x}$

En la ventana gráfica 2D, abre el menú **Editar** y selecciona el comando **Todas** del submenú **Borrar gráfica**. Haz clic en el botón **Ventana Álgebra**. Haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto introduce la fórmula 4x y pulsa ENTER. Haz clic en el botón **gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Obtendrás así la primera gráfica.

Vuelve a la ventana **Álgebra** y haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto introduce la fórmula 4 / x y pulsa ENTER. Haz clic en el botón **gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Comprueba que las dos funciones se cortan en los puntos A(–1, –2) y B(1, 2).

ACTIVIDADES

- **GRÁFICAS**

Representa las siguientes funciones, utilizando DERIVE:

a) $y = x^2 - 4$; b) $y = \cos x$; c) $y = \text{floor}(x)$; d) $y = \dfrac{12}{x}$; e) $y = \dfrac{8}{x^2+1}$; f) $y = \dfrac{2}{x^2-1}$

- **INTERSECCIONES**

Representa gráficamente los siguientes pares de funciones y calcula los puntos de corte entre ellas:

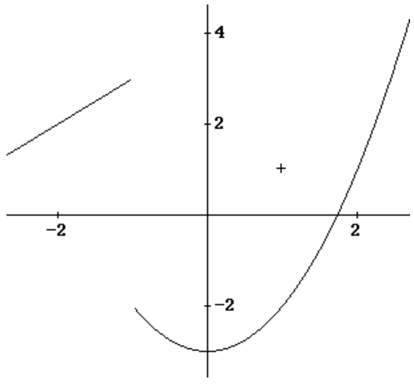
a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x \\ y = \dfrac{-4}{x} + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$

- **A TROZOS CON DERIVE**

Podemos utilizar el programa DERIVE para representar gráficamente funciones definidas a intervalos.

Ejemplo 1.- Dibuja la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3, & \text{si } x > -1 \end{cases}}$ **. ¿Es continua en x = –1 ?.**

Una vez iniciado el programa, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe la expresión $(x+4)$ chi $(-\infty, x, -1) + (x \wedge 2 - 3)$ chi $(-1, x, \infty)$. Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa que la gráfica obtenida es discontinua en el punto x = –1.



Ejemplo 2.- La multa por exceso de velocidad en una carretera con un límite de 45 km por hora es de 50 ∈; más 5 ∈ por cada km desde 46 hasta 55 km por hora; más 10 ∈ por cada km desde 56 a 65 km por hora; más 20 ∈ por cada km a partir de 66 km por hora. Representa gráficamente la función a intervalos que describe el importe de la multa.

La expresión de la multa (Y) como función de los km por hora (X) es:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < X \le 45 \\ 50 + 5 \cdot (X - 45), & \text{si } 45 < X \le 55 \\ 50 + 5 * 10 + 10 \cdot (X - 55), & \text{si } 55 < X \le 65 \\ 50 + 5 * 10 + 10 * 10 + 20 \cdot (X - 65), & \text{si } X > 65 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo: $Y = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < X \le 45 \\ 50 + 5 \cdot (X - 45), & \text{si } 45 < X \le 55 \\ 100 + 10 \cdot (X - 55), & \text{si } 55 < X \le 65 \\ 200 + 20 \cdot (X - 65), & \text{si } X > 65 \end{cases}$

Para introducirla en DERIVE sigue los siguientes pasos:

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe la expresión:

0 chi (0, x, 45) + (50 + 5· (x–45)) chi (45, x, 55) + (100+10·(x–55)) chi (55, x, 65) + (200+20·(x–65)) chi (65, x, +∞)

Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa la gráfica obtenida. Si es necesario, modifica el rango y la escala o el zoom de los ejes. Por ejemplo, puedes usar como rango los siguientes valores: Izquierda: −1, Derecha: 140, Arriba: 800, Abajo: −15

¿A qué velocidad la multa es superior a 250 ∈?.

ACTIVIDADES

a) Representa la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 1 \\ -x + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Estudia su continuidad en el punto x = 1.

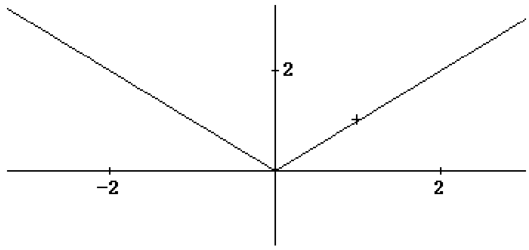
b) Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{si } x < -3 \\ x^2 - 4, & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ -2x + 11, & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Estudia su continuidad en los puntos x = –3 y x = 3.

- **<u>FUNCIONES VALOR ABSOLUTO</u>**

La función valor absoluto de x se define de la siguiente forma: $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \ge 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Por ejemplo, $|3| = 3$, $|-3| = 3$. Veamos como se puede utilizar el programa DERIVE para representar gráficamente funciones valor absoluto.

Ejemplo 1.- **Representa gráficamente la función** $\mathbf{f(x) = |x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}}$ **. ¿Es continua en x = 0 ?.**

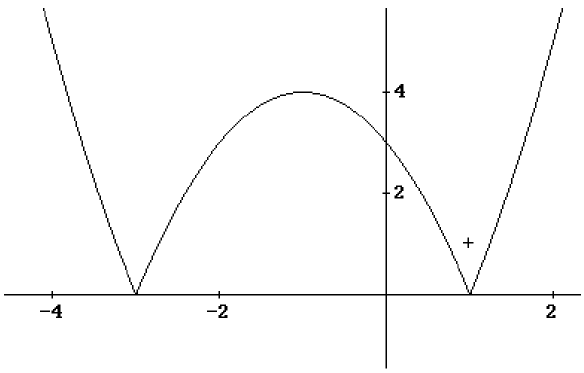
En la ventana de Álgebra, haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto correspondiente escribe la expresión **abs(x)** y haz clic en **Sí**. Abre la ventana gráfica haciendo clic en el botón **Gráficos 2D** y selecciona **Edición / Borrar gráfica / Última**. A continuación haz clic en el botón **Representar**. La gráfica obtenida es continua en el punto x = 0, si bien no es derivable en dicho punto, por tener dos tangentes en el origen.



Ejemplo 2.- **Representa gráficamente la función** $\mathbf{f(x) = \left|x^2 + 2x - 3\right|}$ **. ¿Es continua?.**

Borra la última gráfica, mediante el comando **Edición / Borrar gráfica / Última**. A continuación haz clic en el botón **Ventana Álgebra**.

En la ventana de Álgebra, haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto correspondiente, escribe la expresión $abs\left(x \wedge 2 + 2x - 3\right)$ y haz clic en **Sí**. Abre la ventana gráfica haciendo clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa que la gráfica obtenida es continua en todos sus puntos, pero no es derivable en los puntos x = –3 y x = 1.



ACTIVIDADES

- **CINCO TROZOS**

Representa gráficamente la función: $f(x) = \begin{cases} x, & si -3 \leq x \leq 0 \\ 0, & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & si\ 1 < x \leq 2 \\ -2, & si\ 2 < x \leq 3 \\ 0, & si\ x < -3 \quad ó \quad x > 3 \end{cases}$

¿En qué puntos es continua la función?.

¿Cuál es la gráfica de la función $|f(x)|$?.

- **A TROZOS**

Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+1|, & \text{si } x \le 1 \\ 2/x, & \text{si } 1 < x \le 4 \\ a, & \text{si } 4 < x \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad y halla a para que sea continua en x = 4.

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2. Gráficas de sucesiones

Veamos como se puede usar DERIVE para representar gráficamente sucesiones y estudiar su comportamiento.

Ejemplo 1.– Sea la sucesión definida por $a_n = \frac{3n+4}{n+1}$. Halla los diez primeros términos, así como a_{100}, a_{1000}. Dibuja la gráfica de la sucesión. ¿Cuál crees que es el límite de la sucesión?.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto introduce la fórmula a(n)**:**=(3n+4)/(n+1). Haz clic en **Sí**. Para calcular el término a_{100} , haz clic en **Editar expresión** e introduce la expresión a(100)= . Pulsa ENTER y obtendrás el término correspondiente. Para obtener el resultado en forma decimal, haz clic en el botón **≈ Aproximar**.

Para representar gráficamente la sucesión, introduciremos el vector $\left[n, \frac{3n+4}{n+1} \right]$. Para ello, haz clic en **Editar expresión** e introduce la fórmula [n, a(n)]. Pulsa ENTER. Haz clic en el botón **Gráficos 2D**. Elige el comando **Rango** del menú e introduce los siguientes valores: Izquierda = –1, Derecha = 50, Inferior = –1, Superior = 5. Haz clic en el botón **Representar**. En la siguiente ventana introduce Valor mínimo = 0, Valor máximo = 50. Elige la opción **Puntos** y selecciona el tamaño máximo. Haz clic en **Sí** y observa la gráfica obtenida. A la vista de la gráfica, ¿cuál crees que es el límite de la sucesión?.

Ejemplo 2.– Sea la sucesión a_n definida por: $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = a_{n-1} - 2n \end{cases}$. Halla los diez primeros términos y dibuja la gráfica de la sucesión.

Se trata de una sucesión definida por recurrencia. Vamos a definirla utilizando la función IF de DERIVE, cuya sintaxis es la siguiente:

IF(condición, instrucción 1, instrucción 2, instrucción 3)

Si la condición es cierta, DERIVE realiza la instrucción 1, si es falsa realiza la instrucción 2 y si no puede verificar la condición realiza la tercera. Las instrucciones 2 y 3 son opcionales.

Haz clic en el botón **Editar expresión** e introduce la fórmula a(n)**:**=If(n=1, 100, a(n–1)–2n). Pulsa ENTER. Para obtener los diez primeros términos, haz clic en **Editar expresión** e introduce la función VECTOR(a(n), n, 1, 10). Pulsa ENTER. Haz clic en el botón **= Simplificar** y observa el resultado.

La función VECTOR de Derive genera una lista cuyas componentes son el resultado de sustituir diferentes datos en una misma expresión. Si tenemos definida una función u(x) y activamos Simplificar sobre la expresión VECTOR(u(k), k, n, m), obtenemos la lista [u(n), u(n+1), u(n+2), …, u(m)].

Para representar gráficamente la sucesión, haz clic en el botón **Editar expresión** e introduce la fórmula VECTOR([n, a(n)], n, 1, 20). Pulsa ENTER y haz clic en **= Simplificar**. Observa que obtienes una tabla de valores de la sucesión. Haz clic en el botón **Gráficos 2D**. Selecciona el comando **Puntos** del menú **Opciones** y activa la opción **No** conectados. Introduce como **Rango** el siguiente: Izquierda = –1, Derecha = 22, Inferior = –300, Superior = 150. Haz clic en **Representar**. Observa la gráfica obtenida. ¿Qué comportamiento tiene la sucesión?.

3. Aplicaciones de las sucesiones.

- **CÁLCULO FINANCIERO CON DERIVE**

También podemos utilizar el programa Derive para estudiar sucesiones geométricas y resolver problemas relacionados con las actividades económicas y financieras. Todo consiste en editar la expresión de la fórmula adecuada en cada caso. Veamos a continuación algunos ejemplos.

- **Sucesión geométrica**

En una sucesión geométrica conocemos el primer término $a_1 = 4$ y la razón r = 3. Calcula el décimo término a_{10}.

Para resolver el problema hay que utilizar la fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Para ello en la ventana **Álgebra** edita la expresión $a\, r \wedge (n-1)$. Haz clic en el botón **SUB Sustituir vari**ables. En la siguiente ventana sustituye **a** por **4**, **r** por **3** y **n** por **10** y haz clic en **Simplificar**. El resultado es $a_{10} = 78732$.

- **Imposición a plazo**

Calcula el capital final que obtenemos mediante una imposición de 5000000 ptas al 6% de interés compuesto durante 5 años. Hacienda retiene el 25% de los intereses.

Para resolver el problema, en la ventana **Álgebra** edita la expresión $c(1+r) \wedge t$. Haz clic en el botón **SUB Sustituir variables**. En la siguiente ventana sustituye **c** por **5000000**, **r** por **0,06∗0,75**, **t** por **5**. Haz clic en **Simplificar** y haz clic en el botón **Aproximar**. El resultado es $6{,}23090 \cdot 10^6$.

- **Plan de pensiones**

Un trabajador comienza un plan de pensiones a los 35 años con cuotas mensuales de 15000 ptas. Su contrato con el banco le garantiza un 8% de interés. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años, cuando se jubile?.

En la ventana **Álgebra** edita la expresión: $a\left((1+r/n) \wedge (n(t+1)) - (1+r/n) \wedge n\right)/(r/n)$. Haz clic en el botón **SUB Sustituir variables**. En la siguiente ventana sustituye **a** por **15000**, **r** por **0,08**, **n** por **12**, **t** por **30**. Haz clic en **Simplificar** y haz clic en el botón **Aproximar**. El resultado es: $2{,}42108 \cdot 10^7$.

- **Préstamo**

Calcula la anualidad de amortización que hay que pagar para devolver 5000000 ptas al 9% de interés compuesto durante 10 años.

En la ventana **Álgebra** edita la expresión $d(1+r/n)\wedge(n\cdot t)r/((1+r/n)\wedge(n\cdot t)-1)$. Haz clic en el botón **SUB Sustituir variables**. En la siguiente ventana, sustituye **d** por **5000000**, **r** por **0,09**, **n** por **1**, **t** por **10**. Haz clic en **Simplificar** y haz clic en el botón **Aproximar**. El resultado es $7{,}791\cdot10^{5}$.

- **En resumen**

Para resolver problemas con Derive es suficiente editar las fórmulas y elegir la opción **Sustituir variables**, sustituir cada letra conocida por su valor y luego hacer clic en **Aproximar** para obtener el resultado.

Si el problema es inverso, y nos piden hallar el valor de una variable que no está despejada, sustituimos cada letra por su valor y luego elegimos la opción **Resolver**.

ACTIVIDADES

1) En una sucesión geométrica conocemos $a_1 = 2$, r = 2,5. Calcula el décimo término, a_{10}, y la suma de los 10 primeros términos.
2) Una persona necesita un capital de 15000000 ptas para invertir en un negocio. Si anualmente es capaz de ahorrar 2000000 ptas, ¿cuántos años transcurrirán para obtener el capital deseado si en el banco le garantizan un 6,5 % de interés compuesto?. Hacienda retiene un 25% de los intereses en cada pago.
3) Calcula la cantidad de amortización que hay que pagar para devolver 10000000 ptas en las siguientes condiciones:
   a) Al 7,6%, durante 5 años, mensual.
   b) Al 7,4%, durante 12 años, trimestral.
   c) Al 8,5%, durante 15 años, anual.
   d) Al 9,2%, durante 25 años, mensual.
4) Calcula el capital final que obtenemos mediante una imposición de 7500000 ptas al 4,3% de interés compuesto durante 8 años. Hacienda retiene el 25% de los intereses de cada pago.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Introducción

Con Derive podemos representar gráficamente funciones, pero además podemos calcular límites de funciones, estudiar la continuidad, obtener las asíntotas de la gráfica de una función. También permite el programa calcular derivadas y, sobre todo, comprender el concepto de derivada y su interpretación geométrica en términos de secantes y tangentes. En las siguientes actividades analizaremos las posibilidades didácticas de Derive en el tratamiento de estas cuestiones.

1. Límites, continuidad y asíntotas de funciones

Ejemplo 1.– Calcula $\lim_{x\to1}\frac{4x^2-4x}{x^2-1}$ y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente. Estudia la continuidad de la función para x = 1.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $\left(4x\,\hat{}\,2-4x\right)/\left(x\,\hat{}\,2-1\right)$. Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **lim Calcular límites** y escribe en **Punto: 1**. Comprueba que en **Aproximación desde** está seleccionada la opción **Ambos**, y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado 2.

Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Aparece en pantalla la gráfica de la función $y=\dfrac{4x^2-4x}{x^2-1}$.

Vamos a calcular el valor de la función para x=1. Selecciona la expresión de la función y haz clic en el botón **SUB Sustituir variables**. En el siguiente cuadro de diálogo, escribe en la casilla **Sustitución: 1** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado el signo **?**. El interrogante indica que no existe el valor de la función para x = 1.

Para x = 1, existe el límite y no existe el valor de la función. Por tanto, la función tiene una discontinuidad evitable en dicho punto.

Ejemplo 2.– Cálculo de límites. Asíntotas verticales.

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^3-4x}$, indica el valor de los siguientes límites, comprobando con DERIVE la corrección del resultado: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. ¿Es continua la función en x = 0?. ¿Y en x = 2?.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $f(x):=\left(2x\,\hat{}\,3-3x\right)/\left(x\,\hat{}\,3-4x\right)$. Pulsa el botón **Sí**. Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **Lim Calcular límites** y en el cuadro de texto **Punto** escribe **0** y en **Aproximación desde**, selecciona **Derecha**. Haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**.

Selecciona la expresión de la función y haz clic en el botón **Lim Calcular límites**. Comprueba que en el cuadro **Punto** esté escrito un **0**. En el cuadro **Aproximación desde**, haz clic en **Izquierda**. Haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**.

Selecciona de nuevo la expresión de la función y haz clic en el botón **Lim Calcular límites**. Comprueba que en el cuadro **Punto** está escrito **0**. En el cuadro **Aproximación desde**, selecciona **Ambos**. Haz clic en el botón **Sí** y haz clic en el botón **= Aproximar**.

Utiliza las mismas técnicas para calcular los tres límites cuando x tiende a 2. Selecciona la expresión de la función y haz clic en botón **Gráficos 2D**. Haz clic en **Representar**. Observa la gráfica de la función y comprueba que f(x) es discontinua en el punto x = 2, mientras que es continua en x = 0.

Haz clic en el botón **Ventana** Álgebra y edita la expresión **x=2**. Con dicha expresión seleccionada, haz clic en **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa que la recta de ecuación x = 2 es una asíntota vertical de la curva.

¿Es continua la función en x = –2?. La recta de ecuación x = –2, ¿es una asíntota vertical?.

Ejemplo 3.– Asíntotas oblícuas.

Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2x^2-6x-5}{3x+1}$. Halla la asíntota oblicua y represéntala gráficamente.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $f(x):=\left(2x\hat{}2-6x-5\right)/\left(3x+1\right)$. Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y en **Representar**. Observa la gráfica de la función. Con ayuda de los botones de zoom, √ · E, o pulsando la tecla **F9**, investiga que le ocurre a la gráfica para valores de x alejados de 0. ¿Hay alguna recta que se aproxime a la curva para valores de x alejados de 0?.

Vamos a calcular $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Para ello, haz clic en el botón **lim Calcular límites** y en la caja de texto escribe: $f(x)/x$. En **Variable** selecciona **x** y en **Punto** escribe ∞. En **Aproximación desde**, selecciona **Ambos**. Haz clic en **Sí**. Haz clic en **= Simplificar**.

Representa gráficamente la recta y = a x. Para ello edita la expresión y**:** = a x . Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. ¿Qué relación tiene esta recta con la gráfica de f(x)?. Para apreciar mejor la relación utiliza la escala **x:5**, **y:5** y haz zoom.

Vamos a calcular $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a\cdot x\right)$. Haz clic en el botón **Ventana Álgebra**. Haz clic en el botón **lim Calcular límites** y en la caja de texto escribe: f(x)–ax. Introduce como variable **x** y en **Punto** pon ∞. En **Aproximación desde**, selecciona **Ambos** y pulsa ENTER. Haz clic en el botón **= Simplificar**.

Representa gráficamente la recta de ecuación y = a x + b. Edita la expresión y: = a x + b. Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa que la recta y = a x + b es asíntota oblicua de la curva.

ACTIVIDADES

- **CONCEPTO DE LÍMITE**

a) Representa gráficamente con DERIVE la función $f(x)=e^{1/\log(x)}$. A la vista de la gráfica, indica el valor de los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$	$\lim_{x\to 0^+} f(x)$	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 1^-} f(x)$	$\lim_{x\to 1^+} f(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) Calcula los límites anteriores con DERIVE, seleccionando el comando Límites del menú Cálculo, o bien pulsando el botón lim Calcular límites de la barra de herramientas. ¿Hay algún resultado que no coincida con los obtenidos en el apartado (a) ?.

c) Basándote en la información obtenida, indica la respuesta "definitiva" sobre los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

De los límites anteriores, ¿cuáles no hace bien DERIVE?. ¿Cuál puede ser el motivo?.

- **CALCULA LÍMITES**

Halla los siguientes límites y cuando no existan calcula los límites laterales. Representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{4x-5}{x^2-3}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ f) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ g) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

- **CONTINUIDAD**

Define la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$.

a) Calcula f(1) y f(0). ¿Qué ocurre?. Define f(0) para que f sea continua en x=0.

b) Representa con Derive la gráfica de f e indica el valor de los siguientes límites: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Comprueba los resultados calculándolos con el comando **Cálculo / Límites**.

c) ¿Por qué $\lim_{x \to 0} f(x)$ no es ∞ a pesar de que su denominador tiende a 0 ?. ¿Existe $\lim_{x \to +\infty} \text{sen}\,(x)$?.

d) Sin embargo, ¿por qué existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?. Para contestar esta cuestión, dibuja la gráfica de f(x) junto con las funciones $y = \dfrac{1}{x}$, $y = -\dfrac{1}{x}$, en escala x: 5, y: 0.5.

- **ASÍNTOTAS VERTICALES**

Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \log\left(6x^2 + 5x - 4\right)$ e indica, a la vista de ésta, si f tiene asíntotas verticales. En caso afirmativo, determina las ecuaciones de dichas asíntotas y compruébalo calculando los límites laterales necesarios.

- **ASÍNTOTAS HORIZONTALES**

Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2 + 3}$. A la vista de gráfica, ¿crees que la función tiene alguna asíntota horizontal?. Calcula $a = \lim_{x \to \infty} f(x)$ y representa gráficamente la recta de ecuación y = a. ¿Qué relación hay entre la asíntota horizontal y el límite anterior?.

- **DISCONTINUIDADES**

Representa gráficamente las siguientes funciones, halla sus discontinuidades y clasifícalas:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & \text{si } x \le 1 \\ x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e) $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$ f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

2. Derivadas con Derive

- **CONCEPTO DE DERIVADA**

1) Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 1$. Sitúa el cursor de la pantalla gráfica en el punto A(1, 0). Pulsa la tecla **F9** repetidas veces hasta obtener una escala de x**:** 0**.**001, y**:** 0**.**001. Según nos acercamos al punto A(1, 0), ¿a qué tipo de función se va pareciendo la gráfica?.

2) Sitúa el cursor sobre la gráfica en un punto próximo a A(1, 0), por ejemplo en el punto B(1.0005, f(1.0005)). Halla la pendiente entre los dos puntos A y B. Para ello, en la ventana Álgebra edita la expresión P(x1, y1, x2, y2) **:** = $(y2 - y1)/(x2 - x1)$. A continuación edita la expresión P(1, 0, 1**.**0005, f(1**.**0005)) y pulsa ENTER. Si es necesario, haz clic en **= Simplificar** y en **≈ Aproximar**.

3) Edita la expresión f ' (x) y pulsa ENTER. Edita la expresión f ' (1)= y pulsa ENTER. ¿Qué relación hay entre f ' (1) y la pendiente entre los dos puntos A y B?.

4) Selecciona el comando **Escala** de la ventana gráfica y define la escala x**:** 1, y**:** 1. Sitúa el cursor sobre el punto C(–2, 3) y pulsa **F9** repetidas veces. ¿A qué tipo de función se va pareciendo la gráfica?.

5) Sitúa el cursor sobre la gráfica en un punto próximo a C(–2, 3), por ejemplo, en el punto D(–2**.**0005, f(–2**.**0005)). Halla la pendiente entre los puntos C y D, editando en la ventana **Álgebra** la expresión: P(–2, 3, –2**.**0005, f(–2**.**0005)) y pulsando ENTER. Si es necesario, haz clic en **= Simplificar** y en **≈ Aproximar**.

6) Edita la expresión f ' (–2)= y pulsa ENTER. ¿Qué relación hay entre f ' (–2) y la pendiente entre los puntos C y D?.

> **La derivada de la función y=f(x) en el punto P(a, f(a)), f ' (a), es el límite de la pendiente de la secante a la gráfica en el punto Q(x, f(x)) cuando x → a. Es decir:**
>
> $$\mathbf{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

7) Selecciona el comando **Edición / Borrar gráficas / Todas**. Representa gráficamente la función $g(x) = \left| x^2 - 1 \right|$. Sitúa el cursor en el punto (1, 0) y pulsa la tecla **F9** repetidas veces. ¿Qué aspecto tiene en este caso la gráfica en las proximidades del punto (1, 0)?. Calcula g'(x) y g'(1). ¿Tiene este resultado alguna relación con lo observado en la gráfica?.

> **La derivada de la función y=f(x) en el punto P(a, f(a)) es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho función.**
>
> **Una función es derivable en un punto si en dicho punto su gráfica admite una única recta tangente. Si la gráfica tiene más de una recta tangente en un punto, entonces la función no es derivable en dicho punto.**

- <u>**CÁLCULO DE DERIVADAS**</u>

Veamos como se puede usar DERIVE para calcular derivadas:

Ejemplo 1.– Calcula la derivada de la función $\mathbf{y = x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 10x + 3}$

Haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto escribe la fórmula de la función: $x\hat{}5 - 3x\hat{}4 + 5x\hat{}2 - 10x + 3$. La función ^ aparece en el teclado y se activa al pulsar el siguiente carácter (igual que el acento). Observa que únicamente se pone el segundo miembro de la función. Haz clic en el botón **Sí**.

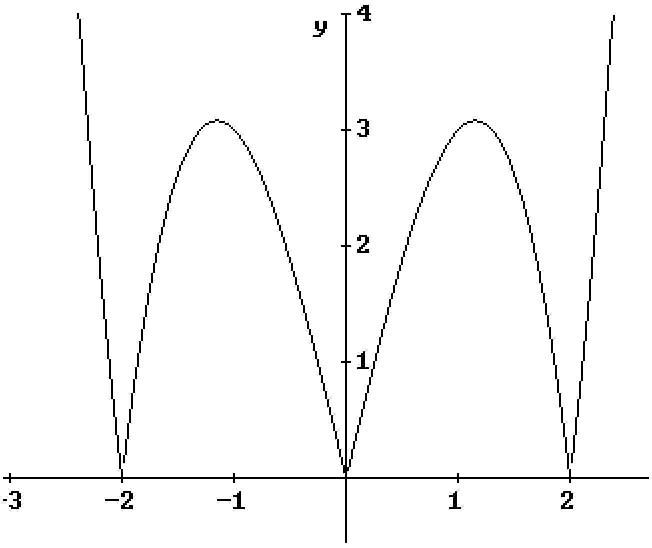
Selecciona la expresión (si no lo está ya) y haz clic en el botón δ (**Calcular derivadas**). En la siguiente ventana, haz clic en el botón **Simplificar** y observa el resultado.

Ejemplo 2.– Calcula la derivada de la función $\mathbf{y = x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 10x + 3}$ en el punto x = 2.

Selecciona la derivada de la función (ya obtenida en el ejemplo anterior) y haz clic en el botón **SUB** (**Sustituir variables**). En la caja de texto **Sustitución**, introduce **2** y haz clic en **Simplificar**. Observa que el resultado es –6.

Ejemplo 3.– **¿Es derivable la función $f(x)=\left|x^3-4x\right|$ en el punto x = 0?. ¿Y en el punto x = –2 ?. ¿Y en el punto x = 2 ?.**

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: f(x)**:**=abs(x^3-4x) y pulsa ENTER. Con la expresión seleccionada, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Observa que la gráfica de la función parece indicar que la función no es derivable en x=0 ni en x=–2 ni en x=2, porque en dichos puntos tiene dos rectas tangentes.



Efectivamente, haz clic en el botón **Ventana Álgebra** y edita la expresión f ' (0)= y pulsa ENTER. ¿Existe f ' (0)?. Edita la expresión f ' (–2)= y pulsa ENTER. ¿Existe f ' (–2)?. Edita la expresión f ' (2)= y pulsa ENTER. ¿Es derivable la función en el punto x = 2 ?.

ACTIVIDADES

- **DERIVADAS**

  Utilizando DERIVE, calcula las siguientes derivadas:

  a) $y=3x^2-10x+3$ b) $y=5x^6+\frac{3}{4}x^4-2x^3+x$

  c) $y=\sqrt{x^3}$ d) $y=\frac{x+3}{x^2-1}$

  e) $y=\ln x^2$ f) $y=e^{2x+7}$

  g) $y=5^x\left(x^2+3x-1\right)$ h) $y=\sqrt{3x^2+5}$

  i) $y=\operatorname{sen}\left(5x^2+4\right)$ j) $y=e^x\cdot\left(x^2+5x+2\right)$

- **DERIVADAS PUNTUALES**

  Calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto que se indica:

  a) $y=x^6-5x+3$ en x = 1 b) $y=\ln(x+3)$ en x = 2.

  c) y = cos x en el punto x = π d) y = $\frac{1}{x}$ en el punto x = 2

3. Tangentes con Derive

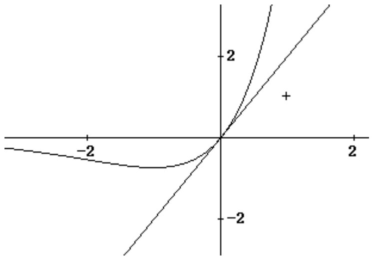
Veamos como usar el programa DERIVE para obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función.

Ejemplo.- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 2x \cdot e^x$ en el punto x = 0.

Una vez iniciado el programa, haz clic en el botón Editar expresión. En la caja de texto introduce la expresión $2xe\wedge x$ y pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón δ (Calcular derivadas) y haz clic en **Sí**. Haz clic en el botón = (Simplificar) y comprueba que el resultado es $e^x \cdot (2x + 2)$.

Con la derivada seleccionada, haz clic en el botón **SUB** (Sustituir variables), escribe en Sustitución un 0 y pulsa el botón **Simplificar**. Comprueba que el resultado es 2. Por tanto, deducimos que la recta tangente es y=2x.

Para salir de dudas, podemos representar gráficamente la función y la recta y=2x. Selecciona la expresión de la función $2x \cdot e^x$ y haz clic en el botón **Gráficos 2D**. Haz clic en el botón **Representar**. Haz clic en el botón **Ventana Algebra**, selecciona la expresión de la recta 2x (si no está, introdúcela en el Editor de expresiones). Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en el botón **Representar**. Comprueba que la recta es tangente a la función en el origen de coordenadas.



ACTIVIDADES

- **RECTAS TANGENTES**

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x)=x^2–4x+5 en el punto de abcisa x=1. Ídem para la función f(x)=$\frac{1}{1+x^2}$.

b) Dada la función f(x) = 1 – x + x^2, calcula mediante límites f ’(2). ¿Qué significado tiene f ‘(2) ?. Deduce el punto de corte de la recta tangente a la curva en x=2, con el eje OX.

c) Se considera la función h(x)=log(x). Calcula la ecuación de la recta tangente a h(x) en el punto x=1. Representa gráficamente la función y su recta tangente.

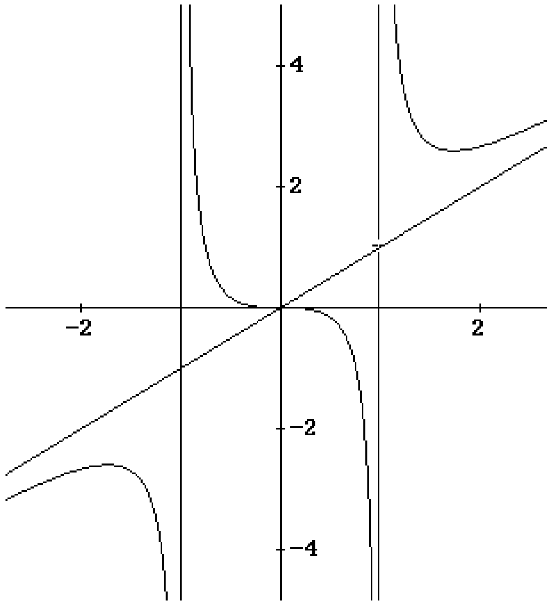
d) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$ en el punto x=2. Representa gráficamente la función y su recta tangente. ¿Se puede hallar la recta tangente en el punto x = 1?. ¿Por qué?.

4. Gráficas con Derive

Podemos utilizar el programa DERIVE para representar gráficamente funciones.

Ejemplo.- Representa la gráfica de la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, obteniendo dominio e imagen, asíntotas, simetrías, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad.

Una vez iniciado el programa, haz clic en el botón **Editar expresión** y, en la caja de texto, introduce la expresión $x\wedge 3/(x\wedge 2-1)$. Haz clic en el botón **Sí**. A continuación, con dicha expresión seleccionada, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en el botón **Representar**. Si es necesario, utiliza los botones de Zoom de la barra de herramientas de gráficos para visualizar mejor la gráfica.



Asíntotas: Puedes comprobar visualmente que las asíntotas verticales son las rectas x=–1 y x=1 (Esto también lo puedes ver algebraicamente, al resolver la ecuación que resulta al igualar a 0 el denominador, $x^2-1=0$).

En la gráfica vemos que no la curva no tiene asíntotas horizontales. Para comprobarlo, calculemos $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Haz clic en el botón **Ventana Algebra**, selecciona la fórmula de la función y haz clic en el botón **lim** (**Calcular límite**). En la caja de texto **Punto Límite** introduce ∞ (utiliza para ello el panel de símbolos). Haz clic en **Simplificar**. Observa que el resultado es ∞. De la misma forma, puedes comprobar que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$. Por lo tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Para hallar las asíntotas oblicuas, primero efectuamos la división de polinomios. Selecciona la fórmula de la función y elige el comando **Expandir** del menú **Simplificar**. En la siguiente ventana activa la opción **Trivial** y haz clic en **Expandir**. El resultado indica que $\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$. Utilizando la técnica anterior puedes comprobar que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$. Por lo tanto, cuando x→±∞, la función se comporta como la recta y = x. Es decir, la recta y = x es una asíntota oblicua de la curva.

Vamos a dibujar las asíntotas en la ventana Gráficos 2D. Para ello introduce en el Editor de expresiones las fórmulas x=–1, x=1, y=x. Selecciona cada una de las expresiones y haz clic en **Representar**, una vez abierta la ventana **Gráficos 2D**.

Dominio e imagen: Observando el gráfico vemos que Dom(f)=R–{–1, 1}, Im(f)=(–∞, +∞).

Simetrías: Se trata de una función impar, porque es simétrica respecto del origen.

Puntos de corte con los ejes: Vemos que solamente corta a los ejes en (0, 0).

Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: Vemos en la gráfica que la función presenta un máximo entre x=–2 y x=–1. Para obtenerlo, hallaremos los puntos críticos (que anulan la primera derivada). Selecciona la fórmula de la función y haz clic en el botón δ (**Calcular derivada**). Haz clic en **Simplificar**. Observa que la derivada de la función es $y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$. Con la derivada seleccionada, haz clic en el botón **Resolver** de la barra de herramientas y obtendrás como puntos críticos [x=0, x= $-\sqrt{3}$, x=$\sqrt{3}$]. Evidentemente, para x=$-\sqrt{3}$ la función tiene un máximo relativo y para x=$\sqrt{3}$ un mínimo relativo. Para x=0 no hay máximo ni mínimo. Para hallar los correspondientes valores de la función, selecciona la fórmula de la función y haz clic en el botón **SUB** (**Sustituir variables**). En la caja **Sustitución** introduce $-\sqrt{3}$ y haz clic en **Simplificar**. Obtendrás $-3\sqrt{3}/2$. Por lo tanto, el maximo relativo es el punto $\left(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2\right)$. De forma análoga obtenemos que el mímimo relativo es el punto $\left(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2\right)$. Como consecuencia, puedes comprobar viendo la gráfica de la función que es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y la función es decreciente en el intervalo $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1,\ 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$.

Concavidad y convexidad: Calculamos primero la segunda derivada. Selecciona la fórmula de la función y haz clic en el botón δ (**Calcular derivada**). En la siguiente ventana introduce **Orden 2** y haz clic en **Simplificar**. Observa que la segunda derivada es $y'' = \frac{2x(2x+3)}{(x^2-1)^3}$. Con la segunda derivada seleccionada, elige el menú **Resolver / Algebraicamente**. En la siguiente ventana completa la inecuación, añadiendo al final de la caja de texto la expresión **>0** y haz clic en **Simplificar**. Obtendrás que la segunda derivada es positiva en los intervalos [x>1, –1<x<0]. De la misma forma puedes resolver la inecuación $\frac{2x(2x+3)}{(x^2-1)^3} < 0$ y comprobar que la segunda derivada es negativa en los intervalos [x<–1, 0<x<1]. Por lo tanto, la función es convexa en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Esta conclusión también la puedes comprobar directamente en la gráfica de la función.

ACTIVIDADES

- **FUNCIÓN RACIONAL 1**

  Considera la función: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$. Halla el dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, las posibles asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles máximos y mínimos. Haz después un esquema sencillo de la gráfica de esta función.

- **FUNCIÓN RACIONAL 2**

  Sea la función $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

  a) Calcula sus asíntotas.

  b) Calcula sus extremos y puntos de inflexión.

  c) Represéntala gráficamente (basándote en los resultados de los apartados anteriores y cualquier otro que puedas necesitar).

- **ESPECIE PROTEGIDA**

Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función $f(t)=\dfrac{15000\cdot t+10000}{2\cdot t+2}$, siendo t el número de años transcurridos.

a) Calcula el tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?.

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?. Justifica la respuesta.

- **ASÍNTOTAS**

Representa gráficamente las siguientes funciones, calcula sus asíntotas y represéntalas:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+4}{2x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+5}{x+3}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ e) $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ f) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

- **PUNTOS CRÍTICOS**

Representa gráficamente la función $f(x)=\left|x^3\cdot e^{-x^2}\cdot\left(3-2x^2\right)+\dfrac{2}{3}\right|$. Determina los máximos y mínimos absolutos y relativos de esta función, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Hay puntos donde la función no es derivable?.

- **PUNTOS DE INFLEXIÓN**

Representa gráficamente la función $f(x)=x^6\cdot e^{-x^2}$. Observando la gráfica y utilizando el cálculo de derivadas, determina los puntos de inflexión de esta función. ¿Se puede asegurar que todos los puntos que anulan la segunda derivada, f '' (x), son puntos de inflexión de dicha función?.

- **EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS**

Representa gráficamente la función $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}\cdot\left(4x^4-16x^2+x+9\right)$

a) A la vista de la gráfica, indica en qué puntos la función tiene extremos relativos.

b) Representa gráficamente f(x) sólo para $x\in[0,+\infty)$. Para ello selecciona la expresión de la función y elige el comando **Definir / Dominio de una variable**. En el cuadro **Variable** escribe **x** y haz clic en el botón **Definir**. En la siguiente ventana selecciona **No negativo**. A partir de la gráfica, determina los extremos absolutos en dicho intervalo.

c) Representa gráficamente f(x) sólo para $x\in[-1, 1]$. Observando la gráfica, determina los extremos absolutos en dicho intervalo.

- **VELOCIDAD Y ACELERACION**

La posición de un móvil en función del tiempo viene dada por $t^3-(1/5)t^2-2t+1$. Representa gráficamente esta función.

a) Calcula la expresión de su velocidad y represéntala gráficamente. Halla la velocidad para t = 5 s.

b) Calcula la expresión de su aceleración y dibuja su gráfica. Halla la aceleración para t = 2 s.

CÁLCULO INTEGRAL

Introducción

Con Derive podemos calcular fácilmente primitivas de funciones, además de obtener integrales definidas y aplicar su cálculo a la resolución de problemas diversos, incluyendo el cálculo de áreas bajo gráficas de funciones, la obtención de volúmenes, resolución de problemas de la Física, de las ciencias económicas y sociales, etc. También permite el programa dibujar al mismo tiempo la gráfica de una función y de su primitiva, permitiendo así, comprender el concepto de derivada, su interpretación geométrica y su relación con el concepto de área. En las siguientes actividades analizaremos las posibilidades didácticas de Derive en el tratamiento de estas cuestiones.

1. Integrales

- **<u>INTEGRAL INDEFINIDA</u>**

Ejemplo.– Calcula la integral: $\int x^3 \cdot e^x$

Haz clic en el botón **Editar Expresión** y en la caja de texto escribe: x^3 e^x y pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona la opción **Indefinida**, escribe en la casilla **Constante: k** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplifica**r. Obtendrás como resultado: $e^x \cdot \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + k$

Comprobación.– Selecciona la expresión obtenida y haz clic en el botón δ **Calcular derivadas**. Comprueba que en la casilla **Orden** está escrito un **1** y haz clic en **Sí**. Haz clic en **= Simplificar**. Observa que obtienes como resultado la función de partida: $x^3 \cdot e^x$. Por tanto, se cumple que: $\int x^3 \cdot e^x = e^x \cdot \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + k$

- **<u>INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA</u>**

Ejemplo.– Halla la función cuya gráfica pasa por el punto P(4, 5) y cuya derivada es $f'(x) = 2x - 2$. Representa gráficamente dicha función.

En primer lugar, calcula la integral indefinida de y = 2x – 2. Edita esta expresión en la **Ventana Álgebra** y haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona **Indefinida**, escribe en la casilla **Constante: k** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado: $x^2 - 2x + k$.

Haz clic en el botón **SUB Sustituir variables**, escribe en **Sustitución: 4** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado k + 8.

Haz clic en el botón **Editar expresión**. Pulsa la tecla **F3** para copiar en la ventana **Editar expresión** el valor obtenido. A continuación escribe **= 5** y pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Resolver** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado: k = –3. Por lo tanto, la función pedida es: $F(x) = x^2 - 2x - 3$.

Edita la expresión: F(x) := x^2 – 2x – 3. Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. Selecciona el comando **Opciones / Rejilla** y en la siguiente ventana activa la opción **Puntos**. Con ayuda del cursor, comprueba que la curva obtenida pasa por el punto P(4, 5).

Haz clic en el botón **Ventana Álgebra**. Selecciona la expresión de la función y = 2x – 2. Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y haz clic en **Representar**. De esta forma tendrás representadas en los mismos ejes la función y la primitiva que pasa por el punto P(4, 5).

- **DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES**

Aunque DERIVE calcula las integrales racionales directamente, el programa nos ayuda a comprobar la descomposición cuando hacemos la integral manualmente.

Ejemplo.– Descompón la función racional $f(x)=\dfrac{5x^4-8x^3-2x^2+11x+2}{x^3-x^2-x+1}$ en suma de fracciones simples.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe la siguiente expresión: $\left(5x\hat{\ }4-8x\hat{\ }3-2x\hat{\ }2+11x+2\right)/\left(x\hat{\ }3-x\hat{\ }2-x+1\right)$. Pulsa el botón **Sí**. Selecciona el comando **Simplificar / Expandir**. En la siguiente ventana selecciona la variable **x** y comprueba que está activada la opción **Racional**. Haz clic en el botón **Expandir**. Obtendrás como resultado la expresión: $\dfrac{4}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}+5x-3$.

Selecciona esta última expresión y haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona **Indefinida**, escribe en la casilla **Constante: k** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado la siguiente expresión: $-\dfrac{\ln(x-1)}{2}+\dfrac{\ln(x+1)}{2}-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{5x^2}{2}-3x$.

Selecciona la expresión de la función f(x) y haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona **Indefinida**, escribe en la casilla **Constante: k** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado la siguiente expresión: $-\dfrac{\ln(x-1)}{2}+\dfrac{\ln(x+1)}{2}-\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{5x^2}{2}-3x$. De esta forma se demuestra la validez del método de integración por descomposición en fracciones simples, ya que hemos comprobado que:

$$\int\frac{5x^4-8x^3-2x^2+11x+2}{x^3-x^2-x+1}=\int\left(\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}+5x-3\right)$$. Es decir:

$$\int\frac{5x^4-8x^3-2x^2+11x+2}{x^3-x^2-x+1}=\int\frac{4}{(x-1)^2}-\int\frac{1}{2(x-1)}+\int\frac{1}{2(x+1)}+\int(5x-3)$$

ACTIVIDADES

- **INTEGRALES INDEFINIDAS**

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int\left(6x^4+6x^2-8x-1\right)$ b) $\int x\,\text{sen}\,x$ c) $\int x\sqrt{x+1}$

d) $\int \text{sen}^2\,x$ e) $\int \ln x$ f) $\int e^x\left(x^2-2x-1\right)$

g) $\int x\,\text{arc tg}\,x$ h) $\int e^x\,\text{sen}\,x$ i) $\int\dfrac{5x-2}{x^2-4x+4}$

j) $\int\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ k) $\int\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$ l) $\int\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$

m) $\int\left(x^2+1\right)^3$ n) $\int\dfrac{x^3+1}{x^4+2x+7}$ o) $\int\left(x\cdot\cos x\right)$

- **INTERPRETACION GEOMÉTRICA**

a) Calcula la integral de la función: $f(x) = x^3 + 2x - 1$ que pasa por el punto (1, 0).

b) Halla la función f(x) que verifica f(0)=1, $f'(x) = e^x \cos x$.

c) Calcula la función f(x) que verifica: f(0)=0, $f'(x) = x \ln\left(x^2 + 1\right)$.

d) Halla una función polinómica de grado 3, sabiendo que $f'(x) = x^2 - 6x + 5$, y que el valor del máximo absoluto de la función es cinco veces el valor del mínimo relativo.

2. Aplicaciones geométricas de las integrales

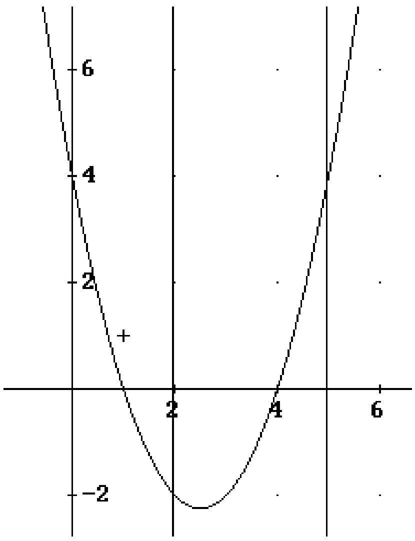
- **ÁREA BAJO UNA CURVA EN UN INTERVALO**

Ejemplo.– Calcula el área del recinto limitado por la curva $f(x) = x^2 - 5x + 4$, el eje OX y las rectas x = 2, x = 5.

En primer lugar, representa gráficamente la función f(x). Para ello haz clic en el botón **Editar expresión** y en **la caja de texto escribe:** $f(x) := x \hat{} 2 - 5x + 4$ **. Pulsa ENTER. Haz clic en el botón Gráficos** 2D y clic en **Representar**.

A continuación halla las raíces de f(x). En la ventana **Álgebra**, selecciona la expresión de la función y haz clic en el botón **Resolver**. Haz clic en **Simplificar**. Obtendrás como resultado [x=1, x=4].

Representa gráficamente las rectas x = 2 y x = 5. Para ello edita la expresión x=2 y haz clic en el botón **Gráficos 2D** y en **Representar**. Vuelve a la ventana **Álgebra** y edita la expresión x=5. Haz clic en el botón **Gráficos 2D** y en **Representar**.



Observa que el punto x=4 se encuentra en el intervalo [2, 5]. Por lo tanto, el área buscada es:

$$S = \left| \int_2^4 f(x) \right| + \int_4^5 f(x)$$

Selecciona la expresión de la función f(x) y haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona la opción **Definida**, escribe en los límites **Inferior: 2**, **Superior: 4** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado –10/3.

Selecciona la expresión de la función f(x) y haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona la opción **Definida**, escribe en los límites **Inferior: 4**, **Superior: 5** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado 11/6.

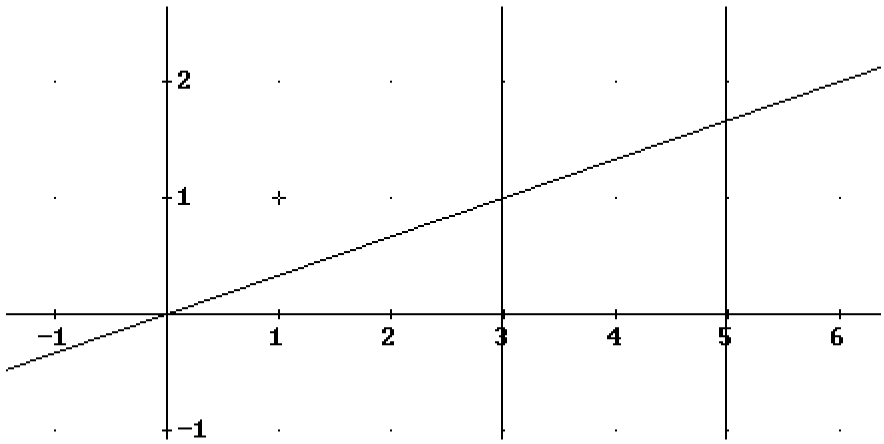
Por lo tanto, el área pedida es: $S = \left| \int_2^4 f(x) \right| + \int_4^5 f(x) = \left| -\frac{10}{3} \right| + \frac{11}{6} = \frac{10}{3} + \frac{11}{6}$

Edita la expresión 10 / 3 + 11 / 6 y haz clic en **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado 31/6 unidades cuadradas. Haz clic en el botón **≈ Aproximar** y obtendrás como resultado 5.16666 unidades cuadradas.

- **<u>VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN</u>**

Ejemplo.– Calcula el volumen de revolución engendrado, al girar alrededor del eje OX, el recinto limitado por la gráfica de la función f(x) = x / 3 y las rectas x = 3, x = 5.

Para ello aplicaremos la fórmula: Volumen = $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2$.



En primer lugar representa gráficamente la función f(x) y las rectas x=3, x=5. Par ello edita la expresión f(x): = x / 3, pulsa ENTER, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y en **Representar**. Edita la expresión x=3, pulsa ENTER, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y en **Representar**. Haz lo mismo con la expresión x=5.

Selecciona la función f(x) y haz clic en el botón **Editar expresión**. En la caja de texto escribe π. Pulsa **F4** para copiar entre paréntesis la función f(x). Elévala al cuadrado, escribiendo $^\wedge 2$, y pulsa el botón **Sí**. Tiene que quedar la expresión: $\pi \cdot (x/3)^\wedge 2$.

Haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona la opción **Definida**, escribe en los límites **Inferior : 3**, **Superior : 5** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado $\frac{98 \cdot \pi}{27}$ unidades cúbicas. Haz clic en el botón **≈ Aproximar** y obtendrás como resultado 11.4028 unidades cúbicas.

ACTIVIDADES

- **INTEGRAL DEFINIDA**

Calcula las siguientes integrales definidas. En cada una de ellas dibuja la función y los límites correspondientes:

a) $\int_2^5 (x+3)$ b) $\int_1^4 (x^2 - 4x + 6)$ c) $\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)$

d) $\int_1^4 \frac{4x}{x^2+1}$ e) $\int_0^{\pi/4} \text{tg } x$ f) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}$

- **CÁLCULO DE ÁREAS**

a) Calcula el área comprendida entre la curva $y = x^2 - 4x + 3$, y las rectas $x = -1$, $x = 4$ y el eje de abcisas OX.

b) Halla el área de la región limitada por las parábolas: $y = x^2$, $x = y^2$.

c) Calcula el área de la región limitada por las parábolas: $y = x^2$, $y = -x^2 + 3$.

- **CÁLCULO DE VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN**

Calcula el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, el recinto limitado por las siguientes gráficas:

a) $y = x^2 + 1$ $x = -1$ $x = 1$

b) $y = 6x - x^2$ $y = x$

c) $x\,y = 1$ $x = y^2$ $x = 4$

d) $y = x$ $y = \sqrt{x}$

3. Aplicaciones físicas y económicas

- **ESPACIO Y VELOCIDAD**

Supongamos que un móvil se desplaza con una velocidad $v = v(t)$, función del tiempo. Entonces, teniendo en cuenta que $v = e'(t)$, siendo $e = e(t)$ el espacio recorrido, se puede obtener el espacio recorrido entre dos instantes de tiempo $t = a$ y $t = b$ por medio de la integral definida:

$$e = \int_a^b v(t)$$

Ejemplo.– Un automovilista sale de Valencia, y al cabo de x horas (0<x<3) va a una velocidad de 80 + 3 x km/h. A continuación descansa durante media hora. Reanuda la marcha a una velocidad de 108 – x km/h, siendo x el tiempo en horas, desde que salió de Valencia. Después de 6 horas llega a su destino. ¿A qué distancia se encuentra de Valencia?.

El espacio recorrido por el automovilista es: $e = \int_0^3 (80 + 3x) + \int_{3'5}^6 (108 - x)$.

Haz clic en **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: 80 + 3 x. Pulsa ENTER. Haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona la opción **Definida**, escribe en los límites **Inferior : 0**, **Superior : 3** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado 507 / 2. Haz clic en el botón **≈ Aproximar** y obtendrás como resultado 253.5 km.

Haz clic en **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: 108– x. Pulsa ENTER. Haz clic en el botón ∫ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona la opción **Definida**, escribe en los límites **Inferior : 3.5**, **Superior : 6** y haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado 2065 / 8. Haz clic en el botón **≈ Aproximar** y obtendrás como resultado 258.125 km.

Por lo tanto, el automovilista se encuentra a una distancia de 253.5 + 258.125 = 511.625 km de Valencia.

ACTIVIDADES

- **ESPACIO RECORRIDO**

  Un móvil se desplaza de modo que su velocidad, expresada en m/s, con respecto al tiempo transcurrido t, expresado en segundos, se puede expresar mediante el siguiente polinomio: $v = t^2 - 2t + 3$.

  a) Calcula su velocidad a los 3 segundos.

  b) ¿Qué espacio ha recorrido entre los instantes 3 y 10 segundos?.

❑ INTEGRALES EN ECONOMÍA

Vamos a ver a continuación dos aplicaciones importantes de las integrales en el campo de la Economía.

- **COSTE MARGINAL Y COSTE TOTAL**

La función de costes es igual a la suma de los costes fijos más los costes variables. Costes fijos son los que no dependen del número de artículos fabricados (local, salarios, maquinaria,…). Costes variables son los que dependen del número de unidades fabricadas. La función de ingresos expresa la relación existente entre los ingresos y el número de unidades vendidas. La función de beneficios es la diferencia entre la función de ingresos y la función de costes.

ACTIVIDADES

- **COSTES E INGRESOS**

  Una empresa fabrica y vende x unidades de su producto cada mes. Las funciones de costes e ingresos son, respectivamente: $C(x) = 75 + 5x + \frac{x^2}{500}$; $I(x) = 10x - \frac{x^2}{100}$.

  a) Halla las variaciones respectivas de costes e ingresos cuando la producción pasa de 100 a 101 unidades.

  b) Halla la función de beneficio y determina el máximo beneficio.

- **BENEFICIOS**

  Una empresa ha estimado que los ingresos y los gastos anuales (en céntimos) que genera la fabricación y venta de x unidades de un determinado producto, vienen dados por las siguientes funciones:

  Ingresos: $I(x) = 28x^2 + 36000x$ Gastos: $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$

  Determina, justificando las respuestas:

  a) La función que define el beneficio anual.

  b) El número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo.

  c) El valor de dicho beneficio máximo.

Conocida la función de costes, podemos obtener su variación relativa o coste marginal (que se calcula como la derivada de la función de costes). La suma de todas estas variaciones relativas (costes marginales) es el coste total. Por tanto, podemos calcular el coste total como la integral del coste marginal.

De la misma forma podemos obtener el beneficio total, como la integral del beneficio marginal.

Ejemplo,- El coste marginal para la producción de x unidades de cierto artículo, es: $C'(x) = 5 + 0{,}01x$. Halla el coste total que se produce para un incremento de producción de 200 a 400 unidades.

El coste total es la integral definida $C_T = \int_{200}^{400} C'(x) = \int_{200}^{400} 5 + 0{,}01x$. Para calcular esta integral, usaremos el programa Derive de la siguiente forma:

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: f(x): = 5 + 0,01 x. Pulsa ENTER y haz clic en el botón $\int$ **Calcular integrales**. En **Integral** selecciona **Definida**, escribe en los límites **Inferior: 200**, **Superior: 400**. Haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado 1600 unidades monetarias.

ACTIVIDADES

- **COSTE TOTAL**

  El coste marginal de un bien es: $C'(x) = 1 + 10x - e^{-x}$, donde x expresa número de artículos producidos. Si los costes fijos son de 4 unidades monetarias convencionales, halla el coste total de producción de 10 unidades del artículo.

- **CAMIÓN**

  El valor de un camión de segunda mano decrece a un ritmo que varía con el tiempo. Si el camión tiene t años, el ritmo al que varía es 80· (t–10) decenas de euros por año. Si nuevo costó 80000 euros, ¿cuánto valdrá 10 años después?.

- **POBLACIÓN**

  Se ha calculado que la población de un país, dentro de x años, estará cambiando a un ritmo de $f(x) = e^{0.02\,x}$ millones de habitantes por año. Si la población actual es de 50 millones, ¿cuál será la población dentro de 10 años?.

- **EPIDEMIA DE GRIPE**

  Unos estudios del Ministerio de Sanidad indican que t semanas después del brote de una epidemia de gripe hay $f(x) = \dfrac{6}{3 + 9 \cdot e^{-0.8\,t}}$ miles de personas nuevas contagiadas cada semana.

  a) ¿Cuánta gente tenía la enfermedad inicialmente?.
  b) ¿Cuántos se han contagiado entre la segunda y la octava semana?.

FUNCIONES PARA WINDOWS

Introducción

FUNCIONES PARA WINDOWS es un programa que permite representar funciones explícitas y, posteriormente, calcular y localizar todo tipo de información acerca de la función representada: imágenes, antimágenes, raíces, discontinuidades aisladas, máximos, mínimos, puntos de inflexión, derivada en un punto, función derivada,… En el caso de tener dos funciones representadas, el programa también permite encontrar los puntos de corte de ambas funciones y calcular el área encerrada entre ellas.

FUNCIONES PARA WINDOWS también permite representar funciones definidas mediante un conjunto de datos expresados en forma de tabla, lo que posibilita realizar estudios de interpolación y regresión.

1. Gráficas de funciones

Vamos a ver como funciona el programa para dibujar y analizar gráficas de funciones explícitas.

- Haz doble clic sobre el icono **Fw27** situado en el Escritorio. Una vez arrancado el programa, aparece el cuadro de diálogo **Funciones–Entrada de datos**, en el que se realiza el control de los ejes a utilizar en la representación y la introducción de la función.
- A la hora de introducir funciones, debes tener en cuenta la sintaxis propia de algunas de ellas, tal como se indica en la siguiente tabla:

FUNCIÓN	SINTAXIS	NOTAS
Logaritmo neperiano	LN()	
Logaritmo decimal	LOG()	
Función exponencial	EXP()	Función e^x
Función exponencial decimal	ALO()	Función 10^x
Valor absoluto	ABS()	
Seno	SEN()	Ángulo expresado en radianes
Coseno	COS()	
Tangente	TAN()	
ArcoSeno	ASE()	
ArcoCoseno	ACO()	
ArcoTangente	ATA()	
Seno	SEG()	Ángulo expresado en grados sexagesimales
Coseno	COG()	
Tangente	TAG()	
ArcoSeno	ASG()	
ArcoCoseno	ACG()	
ArcoTangente	ATG()	

- Haz clic en la caja de texto F(X)= y escribe: $\left(x \wedge 2-4\right)/\left(x \wedge 2-1\right)$. Haz clic en **Aceptar**. Aparece una ventana con la gráfica de la función. Selecciona el comando **Opcions / Mostrar valor unitat eixos**. Observa que se muestran las unidades de los ejes coordenados.
- Selecciona el comando **Opcions / Trama**. A la vista de la gráfica, ¿cuáles crees que son las asíntotas de esta curva?.
- Selecciona el comando **Arxiu / Canviar funcions o paràmetres**. En la ventana **Entrada de datos**, modifica la escala de los ejes de acuerdo con los siguientes valores: **Origen eix X: –10**, **Final eix X: 10**, **Origen eix Y: –7**, **Final eix Y: 7**. Haz clic en el botón **OK** y observa como se vuelve a dibujar la gráfica de acuerdo con la nueva escala.

- Selecciona el comando **Opcions / Mostrar coordenades de la rata**. Sitúa el cursor en el mínimo relativo de la función y observa cuáles son sus coordenadas en la esquina superior izquierda de la ventana.

- Selecciona el comando **1fu / Imatge**. En la caja **x** escribe **0** y haz clic en el botón **D'acord**. Se muestran los valores de x y de f(x) en pantalla. Haz clic en el botón **[<–e]** repetidas veces y verás cómo se desplaza el cursor sobre la gráfica, hacia la izquierda. De la misma forma, si pulsas el botón **[d–>]** sucesivamente, verás como el cursor viaja hacia la derecha, mientras se muestran sus coordenadas en pantalla. Utiliza este procedimiento para hallar las imágenes de los puntos x = –1, x = –2, x = –5, x = –9, x = 1, x = 2, x = 5, x = 9. Finalmente, haz clic en **Annul.lació** para cerrar la ventana.

- Selecciona el comando **1fu / Antiimage**. En la caja de texto **Valor de la y** escribe **5** y haz clic en el botón **Ok**. Observa que el cursor se desplaza de izquierda a derecha, recorriendo toda la gráfica y se detiene en la primera antimagen, que es x = –0.5. Haz clic en el botón Continuar y verás que el cursor se sigue desplazando hasta la siguiente antimagen, que es x=0.5. Haz clic en **Continuar** y verás cómo el cursor desaparece. Por tanto, y=5 tiene dos antimágenes, x = –0.5 y x = 0.5.

- Selecciona el comando **1fu / Arrels**. Observa que el cursor recorre toda la gráfica hasta alcanzar el primer cero de la función, que es x = –2. Haz clic en **Continuar** y verás como el cursor se sigue desplazando hasta el siguiente cero, que es x = 2. Haz clic en **Continuar** y verás cómo desaparece el cursor. Por tanto, f(x) = 0 si y sólo si x = –2 o x = 2.

- Selecciona el comando **1 fu / Discontinuïtats aïllades**. El cursor recorre toda la gráfica hasta alcanzar la primera discontinuidad. Observa que la función tiene una discontinuidad infinita en x=–1. Haz clic en **Continuar** y observa cómo el cursor avanza hasta la siguiente discontinuidad. La función tiene otra discontinuidad infinita en el punto x=1. Haz clic en **Continuar** y verás como desaparece el cursor.

- Selecciona el comando **1 fu / Màxims**. Observa que el cursor recorre toda la gráfica sin detenerse. La función no tiene máximos.

- Selecciona el comando **1 fu / Mínims**. El cursor recorre la gráfica deteniéndose en el punto x=0, y=4. La función tiene un mínimo relativo en el punto (0, 4). Haz clic en **Continuar** para que desaparezca el cursor.

- Selecciona el comando **1 fu / Punts d'inflexió**. El cursor recorre toda la gráfica, sin detenerse. La función no tiene puntos de inflexión.

- Vamos a calcular la derivada en el punto x = –2. Selecciona el comando **1 fu / Derivada en un punt**. En la caja de texto **x** escribe **–2** y haz clic en el botón **D'acord**. Observa que se muestra el valor de la derivada, f ' (–2) = –1.33 y se dibuja en pantalla la recta tangente en dicho punto. Haz clic en el botón **[d–>]** repetidas y observa cómo se va desplazando la recta tangente. Continua hasta que alcances el punto x = 0. ¿Cómo es la recta tangente en el punto mínimo relativo?. Observa también que mientras vas recorriendo la gráfica, se va dibujando en pantalla la gráfica de la función derivada.

- Selecciona el comando **1 fu / Integral definida**. Introduce **Valor inicial de la x: 2** y **Valor final de la x: 6**. Haz clic en **OK**. Observa cómo se señala el área bajo la gráfica y aparece en pantalla el valor del área: 2.856722.

- Elige el comando **1 fu / Intervals de creiximent**. El cursor recorre la gráfica y señala sobre el eje OX los intervalos de crecimiento. Observa que la función es creciente en el intervalo (0, +∞).

- Elige el comando **1 fu / Intervals de decreiximent**. El cursor recorre la gráfica y señala sobre el eje OX los intervalos de decrecimiento. Observa que la función es decreciente en el intervalo (–∞, 0).

- Selecciona el comando **1 fu / Intervals de concavitat**. El cursor recorre la gráfica y señala sobre el eje OX los intervalos donde la función es cóncava. En este caso, el intervalo (–1, 1).

- Selecciona el comando **1 fu / Intervals de convexitat**. Se señalan en pantalla los intervalos donde la función es convexa. En este caso, el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- Selecciona el comando **1 fu / Funció derivada**. Observa que el cursor recorre toda la gráfica, mientras se dibuja la recta tangente en cada punto y la gráfica de la función derivada.
- Selecciona el comando **1 fu / Segona derivada**. El cursor recorre la gráfica mientras se dibuja la gráfica de la función derivada.

2. Área entre dos curvas

- Selecciona el comando **Arxiu / Canviar funcions o paràmetres**. Borra la función F(X)=. En dicha casilla introduce la función: $x\hat{}2$. En la casilla G(X)= introduce la función: $x\hat{}(1/2)$.
- Introduce los siguientes valores: **Origen eix X: –2**, **Final eix X=2**, **Origen eix Y: –2**, **Final eix Y: 2**. Haz clic en el botón **OK** y observa que se dibujan las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
- Vamos a obtener los puntos de corte de las dos gráficas. Selecciona el comando **2 fu / Talls**. El cursor recorre la pantalla y se detiene en el punto x = 1, y = 1, indicando que las curvas se cortan en el punto (1, 1). Haz clic en **Continuar**. El cursor desaparece, pero se ve en la pantalla que también se cortan en el punto (0, 0), origen de coordenadas.
- Vamos a calcular el área comprendida entre las dos curvas. Selecciona el comando **2 fu / Àrea**. En la casilla **Valor inicial de la x**, escribe **0**. En la casilla **Valor final de la x**, escribe **1**. Haz clic en **OK** y verás como se señala en pantalla el área entre las dos parábolas y se indica su valor, S=0.333215.

ACTIVIDADES

- **FUNCIÓN RACIONAL**

  Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ y contesta a las siguientes cuestiones:

  a) Obtén los máximos y mínimos de la función.
  b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los de concavidad y convexidad.
  c) Localiza las asíntotas verticales y horizontales.

- **FUNCIÓN DERIVADA**

  Calcula la función derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$ y averigua su valor para x = 3.

- **ÀREA BAJO UNA CURVA**

  Calcula la superficie del recinto limitado por la curva $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$ y el eje OX desde x = 0 hasta x = 4.

- **ÁREA ENTRE DOS CURVAS**

  Representa gráficamente las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 2 - x$. Contesta a las siguientes cuestiones:

  a) ¿Cuáles son los puntos de corte de ambas funciones?.
  b) ¿Cuál es el área que encierran?.

OPTIMIZACIÓN CON DERIVE

Introducción

Un problema de optimización consiste en encontrar los valores óptimos (que maximizan o minimizan una determinada función) teniendo en cuenta que la o las variables están sometidas a un conjunto de restricciones. Si estas restricciones se pueden expresar mediante ecuaciones, el problema es de optimización condicionada y se resuelve aplicando el cálculo de derivadas. Si las restricciones se pueden expresar mediante inecuaciones y la función objetivo es de primer grado, el problema es de Programación Lineal. Tradicionalmente la enseñanza ha separado estos dos campos de las Matemáticas. Sin embargo, es mucho más significativo hacer un estudio en paralelo, porque, en el fondo, la naturaleza de los problemas a resolver es la misma; únicamente cambian los modos de hacer.

En las siguientes actividades veremos cómo se puede utilizar el programa Derive para resolver problemas de optimización mediante el cálculo de derivadas.

El programa informático más adecuado para estudiar las derivadas y sus aplicaciones es, sin duda, Derive. Este asistente matemático muy indicado para representar gráficamente funciones, obtener derivadas formalmente, y operar con expresiones algebraicas. Derive no es el único programa de este tipo. También tiene cada vez más uso el programa MATHEMATICA y otros asistentes matemáticos. Sin embargo, Derive es el más sencillo de manejar, y por tanto, es muy recomendable su uso en Bachillerato, especialmente en su versión para Windows.

Para resolver un problema de optimización hay que maximizar o minimizar una función y=f(x) que está relacionada con una determinada situación que previamente hay que matematizar. Generalmente la función f(x) es desconocida y hay que obtenerla a partir de la situación concreta. Lo habitual es que la función a optimizar contenga las dos variables x e y. Entonces, para poder obtener y en función de x, es necesario disponer de una ecuación de condición, que relaciona las dos variables x e y.

1. Optimización con Derive

Podemos utilizar el programa Derive para resolver problemas de optimización. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.– El cine

Un cine tiene 400 espectadores si el precio de la entrada es de 3 euros. La asistencia disminuye en 40 espectadores cada vez que el precio aumenta 1 euro. ¿Cuál es el precio que dará el mayor beneficio?.

Sea x el incremento del precio en euros. Si el precio se aumenta en x euros, la asistencia disminuye en 40·x espectadores. Por tanto, el número de espectadores será 400–40·x. Entonces, el beneficio del cine se obtiene multiplicando el precio de cada entrada por el número de espectadores. Por tanto, el beneficio es:

$B(x) = (400 - 40x) \cdot (3 + x)$. Esta es la función a maximizar.

Inicia el programa Derive seleccionando **Inicio / Programas / DERIVE para Windows / DERIVE para Windows**. Abre la ventana gráfica 2D, haciendo clic en el botón **Gráficos 2D**. Una vez abierta la ventana gráfica, elige en el menú **Ventana** la opción **Mosaico vertical**, para tener a la vista las dos ventanas, Algebra y gráfica 2D. Para pasar de una a otra bastará hacer clic con el ratón en la ventana en la que desees trabajar.

En la ventana **Algebra**, haz clic en el botón **Editar expresión** e introduce en la caja de texto la fórmula de la función $(400 - 40x) \cdot (3 + x)$. Haz clic en el botón **Sí**. Selecciona la fórmula de la función y haz clic en la ventana gráfica. A continuación haz clic en el botón **Representar**.

Para visualizar mejor la gráfica de la función, haz clic en los botones de “zoom” de la barra de herramientas de la ventana gráfica, o pulsa las teclas de función:

[F10]	**zoom reduciendo**
[F8]	**reducción vertical**
[F6]	**reducción horizontal**
[F9]	**zoom ampliando**
[F7]	**ampliación vertical**
[F5]	**ampliación horizontal**

También puedes usar las opciones del menú Seleccionar para visualizar mejor la ventana gráfica:

Seleccionar / Centro	Para fijar el centro de la ventana gráfica
Seleccionar / Cursor	Para indicar la posición del cursor
Seleccionar / Escala	Para hacer “zoom” de los ejes convenientemente
Seleccionar / Rango	Para elegir las unidades de los ejes.

Selecciona **Opciones / Modo de trazado**. Observa como aparece el cursor sobre la gráfica. Utiliza las teclas **[←]** y **[→]** para desplazar el cursor sobre la gráfica hasta llegar al máximo de la función. Observa que al desplazar el cursor, sus coordenadas aparecen en la barra de estado.

Haz clic en el botón **Seleccionar rango con caja** de la barra de herramientas gráfica. Sitúa el puntero del ratón cerca del máximo y dibuja un rectángulo alrededor de él. Haz clic en el botón **Sí** del cuadro de diálogo correspondiente. De esta forma se amplia la zona seleccionada del gráfico. Sigue desplazando el cursor por la gráfica con las teclas **[←]** y **[→]** hasta localizar las coordenadas del máximo.

- **<u>RESOLUCIÓN ALGEBRAICA</u>**

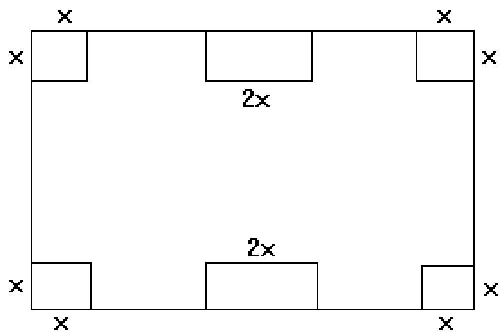
En la ventana algebraica selecciona la fórmula de la función. Haz clic en el botón δ **(Calcular derivadas)** de la barra de herramientas. Haz clic en **Simplificar**. En el menú **Resolver**, selecciona **Algebraicamente**. Haz clic en **Simplificar**. De esta forma hemos obtenido el único valor crítico de la función, $x = \frac{7}{2} = 3,5$. Veamos si es este punto crítico es máximo o mínimo.

Selecciona de nuevo la fórmula de la función y haz clic en el botón δ **(Calcular derivadas)** de la barra de herramientas. En la caja **Orden** introduce **2** (para hallar la segunda derivada) y haz clic en **Simplificar**. Observa que el resultado es –80. Por tanto, como la segunda derivada es negativa, hay un máximo relativo para x=3,5.

Para averiguar el beneficio máximo, selecciona de nuevo la fórmula de la función y haz clic en el botón **SUB (Sustituir variable)** de la barra de herramientas. En la caja **Sustitución** introduce **7 / 2** y haz clic en **Simplificar**. El resultado indica que el beneficio máximo es 1690 euros y se obtiene cuando las entradas se venden a 3,5 euros.

Ejemplo 2.– El maletín

Disponemos de planchas de tamaño 30×20 cm. para confeccionar cajas como muestra la figura. ¿Cuál tiene que ser el tamaño de los cuadraditos para que el volumen del paralelepípedo resultante sea máximo?.



La solución tradicional por análisis consiste en obtener la función correspondiente, calcular la derivada, igualarla a cero y seleccionar entre las soluciones de la ecuación los valores que corresponden a máximos o mínimos:

$$V(X) = 2X(15-2X)\cdot(20-2X) = 8X^3 - 140X^2 + 600X$$

$$V'(X) = 24X^2 - 280X + 600$$

- **RESOLUCIÓN GRÁFICA**

- Haz clic en Editar expresión y en la caja de texto introduce la fórmula de la función: $v(x) := 8\,x\,\hat{}\,3 - 140\,x\,\hat{}\,2 + 600\,x$. Haz clic en el botón Sí.

- Haz clic en el botón Gráficos 2D. Selecciona el comando Edición / Borrar gráficas / Todas. Haz clic en Representar y observa cómo se dibuja la gráfica de la función.

- Selecciona el comando Opciones / Modo de trazado. Utiliza las teclas de flecha [→] [←] para situar el cursor en el máximo relativo de la función. ¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?. Observa que aparentemente el máximo de la función se obtiene para x=2.76 cm, siendo el volumen máximo 757.76 cm^3.

- **RESOLUCIÓN ALGEBRAICA**

- Haz clic en el botón Ventana Álgebra para regresar a la pantalla algebraica.

- Selecciona la expresión de la función que da el volumen y haz clic en el botón δ **(Calcular derivadas)** de la barra de herramientas. Comprueba que está seleccionada la variable x y en la caja Orden aparece 1. Haz clic en el botón Simplificar.

- Observa que el programa muestra la derivada de la función, $V'(X) = 24X^2 - 280X + 600$. Con esta expresión seleccionada, elige el comando Resolver / Algebraicamente. Comprueba que está seleccionada la variable x y haz clic en Simplificar.

- Observa que hay dos soluciones: $\left[x = \frac{5\cdot\sqrt{13}+35}{6}, x = \frac{35-5\cdot\sqrt{13}}{6}\right]$. Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón ≈ **Aproximar**. Obtendrás las soluciones: $[x = 8.83795, 2.82870]$.

- La solución x = 8.83785 cm no es posible, porque x + 2x + x = 4 x = 35.3518 > 30 cm. Por lo tanto, debe ser x = 2.82870 ≈ 2.83 cm.

- El volumen máximo será el valor de la función V(x) para x=2.83. Selecciona la fórmula de la función y haz clic en el botón SUB (Substituir variables). En la caja Sustitución introduce 2.82870. Haz clic en Simplificar. Haz clic en ≈ Aproximar. El volumen máximo es $V_{max} = 758.075$ cm^3.

ACTIVIDADES

- **UNA CUERDA Y DOS CAJAS**

  1) Cortamos una cuerda en dos trozos; con uno de ellos formamos un círculo, y con el otro un cuadrado. ¿Por dónde tenemos que cortar la cuerda para que la suma de las áreas sea mínima?.

  2) Una caja sin tapa se ha formado a partir de una lámina cuadrada de metal blanco, cortando en cada esquina un pequeño cuadrado y plegando los lados. ¿Cómo hacerlo para que el volumen de esta caja sea máximo?.

- **AZUFRE**

En cierta zona, la cantidad de azufre presente en la atmósfera, en partes por millón, evoluciona de acuerdo con la función $N(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}2t + 2{,}1$ donde t se expresa en años. Determina:

a) El ritmo de cambio del azufre presente en la atmósfera dentro de dos años.

b) Cuándo se alcanza la mínima presencia de azufre en la atmósfera y cuál será ésta.

c) En qué tiempo, en el futuro, se alcanzará el mismo valor que en la actualidad.

- **AGRUPACIÓN PACIFISTA**

En 1990 se fundó una agrupación pacifista. El número de sus miembros varía con los años, de acuerdo con la fórmula $N(x) = 50 \cdot \left(2x^3 - 15x^2 + 36x + 2\right)$.

a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?.

b) ¿En qué año se alcanzará el máximo número de socios?.

c) ¿Cuándo el mínimo?.

d) ¿Cuántos miembros habrá en cada uno de los dos últimos casos?.

- **LA ESTACIÓN NUEVA**

Las ciudades A y B están al mismo lado de una vía del tren, respectivamente a las distancias de 5 y 10 km. La distancia en línea recta entre A y B es 13 km. La compañía de ferrocarriles propone construir una estación E para las dos ciudades y está estudiando la cuestión: ¿Cuál es el lugar óptimo para instalar E?. Obviamente se tienen que construir carreteras desde A y B hacia E. El terreno alrededor de las ciudades es muy plano y no hay obstáculos para su construcción. Hay diferentes partes interesadas en el asunto:

1) El deseo de la ciudad A es que E esté lo más cerca de A.

2) La ciudad B quiere que E esté lo más cerca de B.

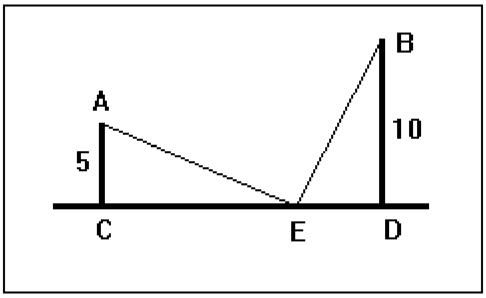
3) El gobierno de la región quiere que E esté equidistante de A y B.

4) La compañía de autobuses quiere que la distancia total a recorrer desde A hasta E y de B a E sea mínima (AE + BE mínima).

SOLUCIÓN:

Desde el punto de vista matemático la condición 4) es la más interesante, pero las demás situaciones permiten combinar un problema geométrico, el método analítico y la utilización de la calculadora gráfica.

Las situaciones 1) y 2) dan lugar a una exploración de la posición relativa de las ciudades y la línea del tren y pone a los alumnos en la pista del teorema de Pitágoras.



La opción 3) tiene una solución geométrica muy sencilla: la construcción de la mediatriz del segmento AB. Para la resolución analítica, se consideran los puntos C y D a lo largo de la línea del tren, pies de las perpendiculares desde A y B. Se comprueba que CD=12 km.

Sea CE = x; AE = y_1*; BE =* y_2*.*

Editamos con Derive las expresiones: $Y_1(x) := \sqrt{25 + x^2}$, $Y_2(x) := \sqrt{100 + (12 - x)^2}$

Se representan ambas funciones haciendo clic en el botón Gráficos 2D y haciendo clic en Representar, seleccionando previamente el rango apropiado.

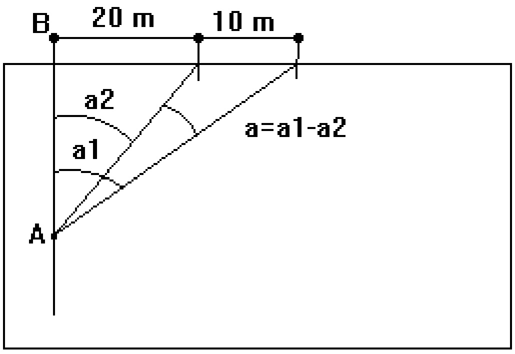
Con el menú Resolver se puede calcular el punto de intersección donde $Y_1=Y_2$*. Para ello, selecciona Resolver / Algebraicamente y en la caja de texto introduce la expresión* $Y_1(x) = Y_2(x)$*.*

Haz clic en Simplificar. Obtendrás como resultado $x=\frac{73}{8}$ *.*

Haz clic en el botón ≈ Simplificar y obtendrás x=9.125. Selecciona la expresión Y_1 *y haz clic en el botón SUB Substituir. Introduce como valor de x=9.125 y haz clic en Sí. Obtendrás el correspondiente valor de Y.*

Para la cuestión 4) se define la función $Y_3 = Y_1 + Y_2$*, seleccionamos el rango adecuado y con el botón Gráficos 2D dibujaremos la gráfica de la función* Y_3*. Activa el modo de trazado en el menú Opciones y desplaza el cursor hasta situarlo en el mímimo. Observa que se obtiene el valor de x para el cual la distancia AE + BE es mínima (aproximadamente x = 4'04 km), siendo la distancia mínima 19'21 km.*

- **EL LANZAMIENTO DE BANDA**



En un campo de fútbol, de dimensiones indicadas en el dibujo, un jugador se mueve por la banda en la zona indicada. Determina a qué distancia deberá disparar a puerta para que el ángulo con el que el jugador ve la portería sea el mayor posible.

- **ORDENADORES**

Deseamos comprar 18 ordenadores y en el mercado hay dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por el producto del número de ordenadores de un tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere. Determina el número de ordenadores de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

- **LUMINOSIDAD**

Halla las dimensiones de una ventana de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y, así, produzca la máxima luminosidad.

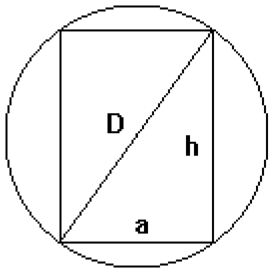
- **CONSERVAS**

En una fábrica de conservas se desea obtener el diseño de un bote cilíndrico, de un litro de capacidad, tal que su coste sea mínimo en material. Averigua qué dimensiones debe tener:

a) Si el bote está abierto por arriba.

b) Si el bote está tapado.

- **SERRERÍA**



En una serrería quieren obtener de un tronco redondo de diámetro D=50 cm una viga de sección transversal rectangular que tenga resistencia máxima. Si la resistencia es directamente proporcional al ancho (a) y al cuadrado del alto (h), ¿qué dimensiones debe tener la viga?.

- **CLUB DEPORTIVO**

Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado (en miles de personas) por la función: $s(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$, donde x indica el número de años desde la última remodelación.

a) Halla el año en el que el club ha tenido el mayor número de socios.

b) El cuarto año se remodeló de nuevo. Indíquese razonadamente si esta remodelación tuvo éxito o no.

- **BENEFICIO MÁXIMO**

Las funciones de ingresos y costes anuales por la fabricación y venta de q unidades de un determinado producto vienen dadas por:

$$I(q)=2000q-0'04q^2 \qquad C(q)=1000000+100q+0'001q^2$$

a) Halla la función que da el beneficio anual.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo?. ¿Cuál es ese beneficio?.

- **CÍTRICOS**

Un cultivador de frutas cítricas estima que si plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el huerto.

a) Determina la función de producción total de naranjas.

b) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas?. ¿Cuál es dicha producción máxima?. Razona la respuesta.

- **VUELOS CHARTER**

Una compañía de vuelos charter admite abonados, a los que cobra 200 euros anuales, pero por cada abonado que exceda de 60, reduce 2 euros en la cuota de todos los abonados. ¿Qué número de abonados hace máximos los ingresos de la compañía?.

PROGRAMACIÓN LINEAL CON DERIVE

Introducción

Un problema de optimización en el que hay que maximizar o minimizar un función lineal y las condiciones vienen expresadas por un conjunto de inecuaciones lineales, es un problema de programación lineal. Se trata de un problema típico de optimización, al igual que los que se resuelven con ayuda del cálculo de derivadas, pero las estrategias de resolución son ahora bastante diferentes. Vamos a ver cómo se puede utilizar el programa Derive para resolver este tipo de problemas.

1. Restricciones y objetivos

Un problema de programación lineal consiste en maximizar (minimizar) una función lineal, por ejemplo $F(x, y) = 3x + 4y$, sabiendo que las variables x, y, están sometidas a una serie de **restricciones** que vienen dadas por inecuaciones, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 5x + 2y \le 10 \\ x + 2y \le 6 \end{array}\right\}$$

En general:

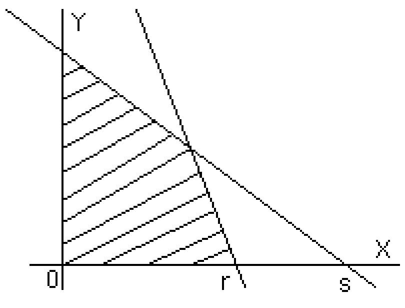
En un problema de programación lineal con dos variables x, y, se trata de **optimizar** (hacer máxima o mínima) una función, llamada **función objetivo** de la forma

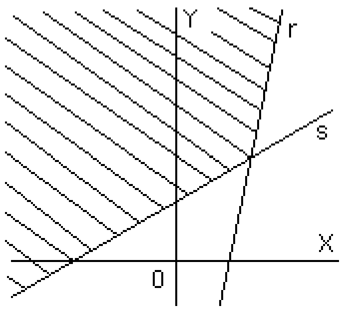
$$\underline{F = p\,x + q\,y}$$

sujeta a una serie de **restricciones** dadas mediante un sistema de inecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y \le c_1 \\ a_2 x + b_2 y \le c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n x + b_n y \le c_n \end{array}\right\}$$

Los puntos que cumplen **todas las restricciones** (soluciones del sistema de inecuaciones) están en un recinto poligonal finito o infinito, llamado **región de validez**.





Los puntos de la región de validez se llaman **soluciones factibles**.

La solución factible que haga óptima (máxima o mínima) la función objetivo, se llama **solución óptima**.

Si hay una **única solución optima**, estará situada en un **vértice del recinto**. Si hay infinitas soluciones óptimas, estarán **en un lado del recinto**. Puede ocurrir que no exista solución óptima.

* Una vez representado el recinto de validez, la solución óptima se encuentra con ayuda de una recta variable que representa la función objetivo y que se desplaza paralela a sí misma.
* Para localizar la solución óptima sin usar la representación gráfica, basta obtener los vértices del recinto y calcular el valor de la función objetivo en cada uno de ellos.

2. Utilizando Derive

Ejemplo.- Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 1,5 millones de cents, y el modelo B en 2 millones. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 del B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser al menos de 6 millones.

a) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos?.

b) ¿Cuáles son los ingresos máximos que puede obtener?.

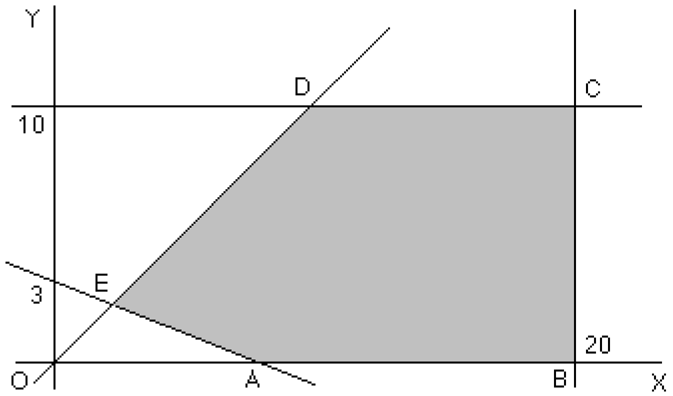
Sean x, y, respectivamente, el número de coches de los modelos A y B. Evidentemente, x e y deben ser números enteros. Como el número de coches del modelo A no puede pasar de 20 y el del modelo B no sobrepasa a 10, debe cumplirse que $0 \le x \le 20$, $0 \le y \le 10$. Como se deben vender al menos tantas unidades de A como de B, debe cumplirse $x \ge y$. Por otra parte, los ingresos obtenidos en esta oferta serán $B=1{,}5x+2y$. Estos ingresos deben ser mayores o iguales que 6 millones. Por tanto, deberá cumplirse $1{,}5x+2y \ge 6$. Así, pues, el conjunto de restricciones del problema es:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 10 \\ x \ge y \\ 1{,}5x + 2y \ge 6 \end{array}\right\}$$

Por otro lado, la función beneficio es $B(x, y)=1{,}5x+2y$. Esta función es la que hay que maximizar.

Para resolver el problema utilizaremos el programa DERIVE.

- Una vez iniciado el programa, haz clic en el botón **Gráficos 2D** y selecciona el comando **Mosaico vertical** del menú **Ventana**. De esta forma visualizarás al mismo tiempo las ventanas **Álgebra** y **Gráficos 2D**. Para pasar de una a otra, basta hacer clic en la barra de título correspondiente.
- En la ventana **Álgebra**, haz clic en el botón **Editar expresión**, teclea **x–20=0** y haz clic en el botón **Sí**.
- En la ventana **Gráficos 2D**, selecciona el comando **Opciones / Color de las gráficas / Cambio de color automático**. Haz clic en **No** y pulsa **ENTER**.
- Haz clic en el botón **Representar** de la barra de herramientas de la ventana gráfica.
- En la ventana algebraica, haz clic en el botón **Editar expresión**, teclea **y–20=0** y haz clic en el botón **Sí**. En la ventana gráfica, haz clic en el botón **Representar**.
- En la ventana algebraica, haz clic en el botón **Editar expresión**, teclea **y–x=0** y haz clic en el botón **Sí**. En la ventana gráfica, haz clic en el botón **Representar**.
- En la ventana algebraica, haz clic en el botón **Editar expresión**, teclea **1,5x+2y–6=0** y haz clic en el botón **Sí**. En la ventana gráfica, haz clic en el botón **Representar**.
- De esta forma hemos dibujado el recinto de validez, es decir el conjunto de puntos (x, y) del plano que cumplen todas las restricciones:



- En la ventana algebraica, haz clic en el botón **Editar expresión**, teclea **B(x, y):=1,5x+2y**. Haz clic en el botón **Sí**. Esta es la función objetivo.

Se trata, pues, de maximizar la función B(x, y)=1,5x+2y en el recinto señalado. Ahora puedes utilizar dos procedimientos para resolver el problema.

- **MÉTODO ALGEBRAICO**

Vamos a hallar los vértices del recinto de validez. Para ello habrá que resolver los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes a cada par de rectas.

- En la ventana algebraica, selecciona el comando **Resolver / Sistema**. En la siguiente ventana, comprueba que el número de ecuaciones es **2** y haz clic en **Sí**. Como primera ecuación introduce **y=0** y como segunda ecuación teclea **#4** para introducir la cuarta expresión de la ventana algebraica. Haz clic en la caja **Variables de la ecuación**. Haz clic en el botón **Simplificar**. De esta forma hemos resuelto el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 1{,}5x + 2y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$ obteniendo como solución: x = 4, y = 0. (coordenadas del punto A)

- En la ventana algebraica, selecciona el comando **Resolver / Sistema**. En la siguiente ventana, comprueba que el número de ecuaciones es **2** y haz clic en **Sí**. Como primera ecuación introduce **#3** y como segunda ecuación teclea **#4** para introducir la tercera y cuarta expresión de la ventana algebraica. Haz clic en la caja **Variables de la ecuación**. Haz clic en el botón **Simplificar**. De esta forma hemos resuelto el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y - x = 0 \\ 1{,}5x + 2y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$ obteniendo: x = 6/3.5=1.714286, y = 1.714286. (coordenadas de E).

- Procede de la misma forma para obtener las coordenadas de los puntos D, C y B. Obtendrás como resultado: D(10, 10), C(20, 10) y B(20, 0).

- En la ventana algebraica, haz clic en el botón **Editar vector**. En la siguiente ventana introduce como número de elementos, **5**, y haz clic en **Sí**. En la primera fila teclea **B(4, 0)**; en la segunda **B(6/3.5,6/3.5)**; en la tercera **B(10, 10)**; en la cuarta **B(20, 10)** y en la quinta **B(20, 0)**. Haz clic en el botón **Sí**. De esta forma se muestra en pantalla el vector

[B(4, 0), B(6/3.5, 6/3.5), B(10, 10), B(20, 10), B(20, 0)].

- Con esta expresión seleccionada, elige el comando **Simplificar** y obtendrás el siguiente vector: **[6, 6, 35, 50, 30]**. Observa que el valor máximo de la función objetivo es **50** y se obtiene en el punto **C(20, 10)**.

Por tanto, el beneficio máximo que se obtiene con esta oferta es de 50 millones y se obtiene vendiendo 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B.

- **MÉTODO GRÁFICO**
- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(p, q):=B(x, y)–B(p, q)** y haz clic en **Sí**.
- Con la expresión anterior seleccionada, elige el comando **Simplificar** y haz clic en el botón **Sí**. De esta forma, para cada valor de p y q obtenemos rectas paralelas a la función objetivo.

Vamos a dibujar las rectas paralelas a la función objetivo que pasan por los vértices A, B, C, D y E del recinto de validez.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(4, 0)=0** y pulsa **ENTER**.
- En la ventana gráfica selecciona el comando **Opciones / Color de las gráficas** y en **Cambio de color automático**, haz clic en **Sí**. A continuación, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(6/3.5, 6/3.5)=0** y pulsa **ENTER**.
- En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(10, 10)=0** y pulsa **ENTER**.
- En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(20, 10)=0** y pulsa **ENTER**.
- En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(20, 0)** y pulsa **ENTER**.
- En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.

Observa que de todas las rectas dibujadas, la que tiene mayor ordenada en el origen es la que pasa por el punto C(20, 10). Por tanto, la función objetivo alcanza su valor máximo en dicho punto. Así, pues, para obtener el máximo beneficio, hay que vender 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B.

Para obtener el máximo beneficio basta editar en la ventana algebraica la expresión **B(20, 10)=**. Al pulsar **ENTER**, obtendrás como ingreso máximo 50 millones.

ACTIVIDADES

- **MAXIMIZA Y MINIMIZA**

  Maximiza y minimiza la función objetivo F(x, y) = x + 4y sobre la región delimitada por las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y \ge 1 \\ 3x + 2y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

- **RECINTO LIMITADO**

  Sea la región del plano definida por las inecuaciones: $\begin{cases} x + y - 1 \ge 0 \\ 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$.

  ¿Para qué valores (x, y) de la región es máxima la función z=5x+2y?.

  ¿Para qué valores (x, y) es mínimo?.

- **BICICLETAS**

  Con 80 kg de acero y 120 de aluminio se quieren fabricar bicicletas de montaña y de paseo que se venderán a 200 € y 150 €, respectivamente. Para la de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 de aluminio y para la de paseo 2 kg de cada uno de los dos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y cuántas de montaña se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?.

- **UN VIAJE**

  Un club de jubilados quiere organizar un viaje para 200 socios. Contratan una agencia que dispone de 4 microbuses de 25 plazas y 5 autobuses de 50 plazas, pero solo dispone de 6 conductores. El alquiler de los autobuses es de 160 euros por día y el de los microbuses de 70 euros por día. ¿Cómo deben hacer para que el coste del viaje sea el menor posible?.

- **PIENSOS**

  Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D. Para ello, se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0'3 € y cuyo contenido vitamínico en miligramos por kilo es el siguiente:

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

  ¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?.

3. Un problema difícil

Algunos problemas típicos de programación lineal son aquellos en los que se trata de minimizar los costes derivados del transporte de mercancías. Veamos un ejemplo.

Un granjero tiene dos almacenes de patatas, A y B, que contienen 20 toneladas y 12 toneladas de patatas, respectivamente. Recibe encargos de tres clientes, C_1, C_2 y C_3 de 8, 10 y 14 toneladas. La distancia entre los almacenes y los clientes (en kilómetros) se dan en la tabla siguiente:

	C_1	**C_2**	**C_3**
A	**2**	**3**	**5**
B	**6**	**7**	**10**

Suponiendo que el coste del transporte es una cantidad fija por kilómetro y tonelada, ¿cómo tendrán que distribuirse las patatas para minimizar el coste del transporte?.

Llamamos x a la cantidad de patatas que hay que llevar desde el almacén A al cliente C_1, e y a la cantidad de patatas que hay que llevar desde el almacén A al cliente C_2.

Entonces, la cantidad de patatas que hay que llevar desde A hasta el cliente C_3 será $20-(x+y)$.

Por otra parte, la cantidad de patatas que hay que llevar desde el almacén B al cliente C_1 será $8-x$, y desde el almacén B al cliente C_2 será $10-y$. La cantidad de patatas que hay que llevar desde B hasta el cliente C_3 será: $14-(20-(x+y)) = x + y - 6$. Obtenemos así el siguiente cuadro resumen:

	C_1	C_2	C_3
A	x	y	$20-(x+y)$
B	$8-x$	$10-y$	$x+y-6$

Las restricciones las obtenemos al obligar que todas estas casillas sean positivas:

$$\left.\begin{array}{l} 8 - x \geq 0 \\ 10 - y \geq 0 \\ 20 - x - y \geq 0 \\ x + y - 6 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Suponemos que el coste de transporte es constante, por kilómetro y tonelada. Por ejemplo, podemos suponer que este coste es de 1 unidad monetaria por km y tonelada. Entonces el coste de transporte coincide con la suma de todas las cantidades transportadas. Por tanto, la función objetivo será:

$C(x, y) = 2x + 3y + 5\cdot(20 - x - y) + 6\cdot(8 - x) + 7\cdot(10 - y) + 10\cdot(x + y - 6) = x + y + 158$

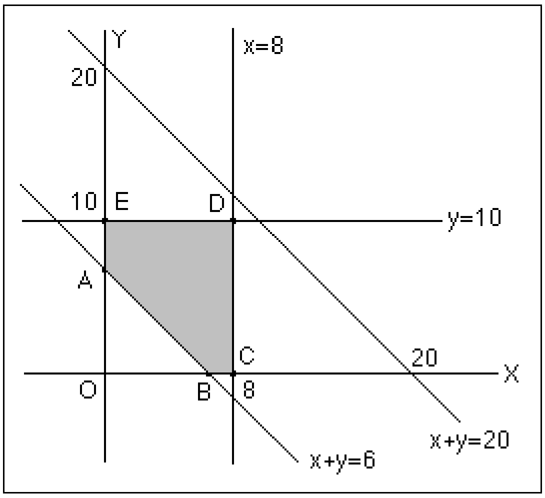
Se trata, pues, de minimizar $C(x, y) = x + y + 158$ sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 20 \\ x + y \geq 6 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{array}\right\}$$

Para ello, haz clic en el botón **Nuevo** y abre la ventana gráfica. Distribuye las ventanas en mosaico vertical utilizando el comando **Ventana / Mosaico vertical**.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **x+y=20**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **x+y=6**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **x=8**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.
- En la ventana algebraica, edita la expresión **y=10**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.

De esta forma hemos obtenido el recinto de validez:



- <u>**MÉTODO ALGEBRAICO**</u>

Vamos a hallar los vértices del recinto de validez. Para ello habrá que resolver los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes a cada par de rectas.

- En la ventana algebraica, selecciona el comando **Resolver / Sistema**. En la siguiente ventana, comprueba que el número de ecuaciones es **2** y haz clic en **Sí**. Como primera ecuación introduce **y=0** y como segunda ecuación teclea **#2** para introducir la segunda expresión de la ventana algebraica. Haz clic en la caja **Variables de la ecuación**. Haz clic en el botón **Simplificar**. De esta forma hemos resuelto el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 6 \end{array}\right\}$$ obteniendo así: x=6, y=0. (coordenadas del punto B).

Utiliza el mismo procedimiento para obtener las coordenadas de los vértices A, C, D y E. Comprueba que dichos puntos son: A(0, 6), C(8, 0), D(8, 10) y E(0, 10).

- En la ventana algebraica, haz clic en el botón **Editar vector**. En la siguiente ventana introduce como número de elementos, **5**, y haz clic en **Sí**. En la primera fila teclea **C(0, 6)**; en la segunda **C(6, 0)**; en la tercera **C(8, 0)**; en la cuarta **C(8, 10)** y en la quinta **C(0, 10)**. Haz clic en el botón **Sí**. De esta forma se muestra en pantalla el vector

[C(0, 6), C(6, 0), C(8, 0), C(8, 10), C(0, 10)].

- Con esta expresión seleccionada, elige el comando **Simplificar** y obtendrás el siguiente vector: **[164, 164, 166, 176, 168]**. Observa que el valor mínimo de la función objetivo es **164** y se obtiene en el punto **A(0, 6)** y en el punto **B(6, 0)**. Pero esto significa que en todos los puntos del segmento **AB** el coste del transporte es mínimo. Luego hay infinitas soluciones, que son los infinitos puntos de dicho segmento.

- **<u>MÉTODO GRÁFICO</u>**

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(p, q):=C(x, y)–C(p, q)** y haz clic en **Sí**.

- Con la expresión anterior seleccionada, elige el comando **Simplificar** y haz clic en el botón **Sí**. De esta forma, para cada valor de p y q obtenemos rectas paralelas a la función objetivo.

Vamos a dibujar las rectas paralelas a la función objetivo que pasan por los vértices A, B, C, D y E del recinto de validez.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(0, 6)=0** y pulsa **ENTER**.

- En la ventana gráfica selecciona el comando **Opciones / Color de las gráficas** y en **Cambio de color automático**, haz clic en **Sí**. A continuación, haz clic en **Representar**.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(6, 0)=0** y pulsa **ENTER**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(8, 0)=0** y pulsa **ENTER**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(8, 10)=0** y pulsa **ENTER**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.

- En la ventana algebraica, edita la expresión **F(0, 10)=0** y pulsa **ENTER**. En la ventana gráfica, haz clic en **Representar**.

Observa que todas las rectas obtenidas son paralelas a la función objetivo y las que pasan por los vértices A y B son coincidentes, siendo éstas, además, las que tienen menor ordenada en el origen. Por tanto, el coste es mínimo a lo largo del segmento AB. Es decir, hay infinitas soluciones.

Como vemos, hay serias dificultades en el planteamiento del problema, y no pocas dificultades en la interpretación de los resultados. Estas complicaciones pueden llegar a bloquear a estudiantes competentes.

ACTIVIDADES

- **UN RECINTO**

Calcula los puntos del recinto $\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$ que hacen mínima o máxima la función $z = 2x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?.

- **LOCOMOTORAS**

Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, para cada una, los que se indican en la siguiente tabla (en miles de euros):

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

- **EMPRESA LÁCTEA**

Una empresa láctea posee dos embotelladoras en A Coruña y Burgos. En ellas se envasan 300000 y 200000 litros diarios, respectivamente. La leche se distribuye a tres centros en las poblaciones de Madrid, Barcelona y Sevilla que necesitan 250000, 150000 y 100000 litros respectivamente. Los costes de transporte de cada litro de leche desde cada embotelladora a cada ciudad son (en miles de euros):

	A Madrid	A Barcelona	A Sevilla
Desde A Coruña	0'05	0'1	0'15
Desde Burgos	0'03	0'07	0'15

¿Cuántos litros deben llevarse desde cada embotelladora a cada ciudad para que el gasto de transporte sea mínimo?.

PROGRAMACIÓN LINEAL CON PRGLIN

Introducción

Derive no es un programa adecuado para resolver problemas de optimización en el que hay que maximizar o minimizar una función lineal sometida a un conjunto de restricciones. Como hemos visto en ejemplos anteriores, el dibujo del recinto de validez en Derive se hace necesariamente largo y tedioso. Además la región no queda remarcada automáticamente, hay que fijarse detenidamente en la gráfica para tener claros los límites de la región de validez, etc.

Afortunadamente, disponemos de un programa especialmente ideado para resolver gráficamente problemas de programación lineal con dos variables. Se trata de PRGLIN, cuya sencillez de manejo y modo de presentación lo hacen especialmente indicado para su uso en Bachillerato. En las siguientes actividades vemos algunos ejemplos de uso del programa para resolver problemas concretos.

1. Usando el ordenador

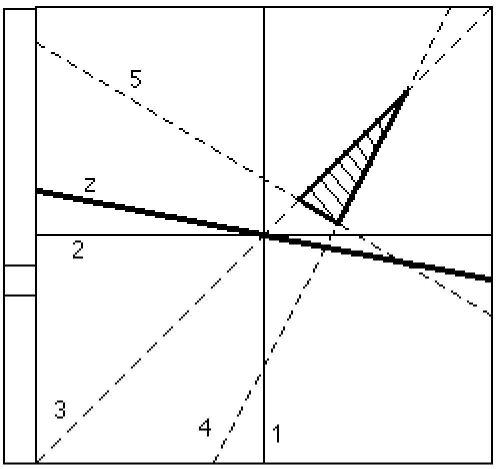
Empezaremos utilizando el ordenador para resolver problemas de programación lineal. Para ello usaremos el software Programación Lineal (PrgLin) para Windows.

Ejemplo 1.- Calcula el máximo de la función z = 2x + 5y con las restricciones x > 0; y > 0; y < 3; 3x – 2y – 6 < 0; 2x + 3y > 6.

- Haz clic en **Inicio**, **Programas**, **Aplicaciones PIE**, **P.Lineal**. En el campo **Funció objectiva** teclea **2x+5y**. Pulsa **ENTER**.
- Abre el menú **Dades** y selecciona **Nova inequació**. Verás que aparece un 1 a la izquierda de un campo libre a continuación de **Restriccions**. Introduce en ese campo la primera inecuación **x>0**. Pulsa **ENTER**.
- Abre el menú **Dades** y selecciona **Nova inequació**. En el campo 2 de **Restriccions** introduce la segunda inecuación **y>0**. Pulsa **ENTER**.
- De la misma forma, introduce todas y cada una de las inecuaciones restantes. A continuación abre el menú **Gràfic** y selecciona **Sistema d'inequacions**. De esta forma se mostrará el recinto de validez.
- Abre el menú **Gràfic** y selecciona **Marcar escala**. Aparece una trama sobre el gráfico que facilita la lectura de coordenadas.
- Observa que el gráfico está situado en una ventana con barra de desplazamiento. Haz clic y arrastra el cuadro de desplazamiento hacia arriba o hacia abajo y observa como se muestran en pantalla los distintos valores de la función objetivo. ¿En qué punto del recinto de validez tomará z el valor máximo?. ¿Cuál será el valor máximo de z?.
- Para averiguarlo puedes ampliar la región que te interese del gráfico, seleccionando **Gràfic**, **Ampliar regió** y dibujando con el ratón un rectángulo sobre la zona del gráfico a ampliar. Si continuas desplazando el cuadro de deslizamiento podrás obtener aproximadamente el valor máximo de z.
- Para salir de dudas haz clic en **Solucions**. Aparece una ventana con pares de inecuaciones que dan origen a posibles vértices del recinto de validez. Recuerda que si el recinto de validez es un polígono convexo, la solución, si existe, se alcanza en uno de los vértices.

De esta forma puedes obtener los vértices de la región factible y los valores que toma la función objetivo en dichos puntos. Aquel en que z tome el valor más alto será la solución del problema.

En nuestro caso, al hacer clic sobre el par 3 i 4, obtenemos:



Intersecció de les rectes
x–y=0
3x–2y=6

(6, 6)
Verifica totes les inequacions
Valor de la funció 42.

Puedes comprobar que este es el valor máximo de la función objetivo.

Ejemplo 2.– Consultando ejemplos

- Haz clic en **Fitxer** y selecciona **Llegir problema**. Aparece una lista desplegable con una colección de ejemplos.

- Haz clic sobre **Màxim de funció** y verás como aparece en la parte inferior de la pantalla el enunciado del problema.
- Selecciona el comando **Gràfic / Sistema d'inequacions**. Aparece en pantalla el recinto de validez. Puedes mover la recta objetivo sobre el recinto de validez, usando el cuadro de desplazamiento y observando dónde alcanza el máximo la función objetivo.
- Haz clic en **Solucions** y aparecerá una lista desplegable con pares de inecuaciones. Selecciona cada uno de los pares para investigar en qué punto se alcanza el máximo de la función. Comprueba que la solución es el punto (6, 6) que es la intersección de las rectas numeradas como 3 y 4.
- Selecciona el comando **Fitxer / Llegir problema**. En la lista desplegable **Llista de problemes** selecciona **Maximitzar la funció**. Lee el enunciado en la parte inferior.
- Selecciona **Gràfic / Sistema d'inequacions** y resuelve gráficamente el problema. Utiliza el comando **Solucions** para comprobar tus conjeturas.
- Selecciona el comando **Fitxer / Llegir problema**. En la lista desplegable **Llista de problemes**, selecciona **A la fusteria** y lee el enunciado en la parte inferior.
- Selecciona **Gràfic / Sistema d'inequacions** y resuelve gráficamente el problema. Utiliza el comando **Solucions** para comprobar tus conjeturas.
- Selecciona el comando **Fitxer / Llegir problema**. En la lista desplegable **Llista de problemes**, selecciona **Una constructora** y lee el enunciado en la parte inferior.
- Selecciona **Gràfic / Sistema d'inequacions** y resuelve gráficamente el problema. Utiliza el comando **Solucions** para comprobar tus conjeturas.
- Usa la misma técnica para resolver otros ejemplos de la **Llista de problemes**.

ACTIVIDADES

- **MÁXIMO Y MÍNIMO**

  a) Calcula el valor máximo y mínimo de las funciones $F(x, y)=4x+3y$, $G(x, y)=x+2y$ sometidas a las restricciones : $y \le x$; $x \le 4$; $y \ge 0$.

  b) Calcula el valor mínimo y el máximo de las funciones $F(x, y)=x+2y$, $G(x, y)=2x+y$ sometidas a las restricciones $y \le 4$, $x \le 3$, $x - y \le 2$, $x - y \ge 0$.

- **MINIMIZA**

  Minimiza la función $z = 3x + 2y$ con las siguientes restricciones: $\left.\begin{array}{l} 7x + 2y \ge 4 \\ 4x + 5y \ge 20 \end{array}\right\}$

- **MAXIMIZA**

  Maximiza la función $z=4x+3y$, con las restricciones siguientes: $\left.\begin{array}{l} x + y \le 6 \\ 2x + y \le 10 \\ -x - y \le 3 \end{array}\right\}$

  Las variables x e y no pueden ser negativas.

- **VITAMINAS**

  En una revista de dietética hemos leído que una alimentación equilibrada para una persona es aquella que le proporciona al día 120 unidades de vitaminas B, 240 unidades de vitamina C y 80 unidades de vitamina D. En la primera revista se hace publicidad de dos alimentos transgénicos: el Properdín, que proporciona 60 unidades de vitamina B, 40 de C y 20 de D por caja y el Monordín, que proporciona 20 unidades de vitamina B, 120 de C y 20 de D por caja. Si una persona no puede pedir más de 7 cajas de cada producto y el precio es de 4 € y 3'2 €, respectivamente, ¿cuántas cajas necesita pedir de cada clase para satisfacer sus necesidades, con el menor gasto?.

- **BOLSA**

  Disponemos de 210000 € para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las del tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130000 € en las del tipo A y como mínimo 6000 € en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?.

2. Del enunciado al teclado

Cualquier programa de ordenador facilita la tarea de dibujar las gráficas, obtener el recinto de validez, realizar los cálculos, etc. Pero no nos ayuda en la dificultad fundamental a la hora de afrontar la resolución de un problema de programación lineal: traducir algebraicamente las condiciones del contexto del problema a un conjunto de inecuaciones.

Incluso una vez resuelto el problema desde el punto de vista algebraico, nos encontramos con otra nueva dificultad: interpretar en contexto los resultados obtenidos. Y hay ocasiones en que los árboles nos impiden ver el bosque, porque lo importante en un problema contextualizado es el contexto y, a veces, las soluciones matemáticas pueden no ser compatibles con el contexto. Por ejemplo, las soluciones matemáticas pueden no ser enteras y el contexto únicamente admite soluciones enteras.

Para adquirir soltura en la resolución de problemas de optimización, solamente hay un camino: resolver muchos problemas de optimización. Aquí tienes algunos ejemplos. En ellos lo fundamental es formular el problema matemático a partir de la situación concreta e interpretar las soluciones. El proceso concreto de cálculo es menos importante, porque del cálculo ya se encarga el ordenador.

- **REPARACIONES**

Una empresa dedicada a la reparación de componentes electrónicos recibe el encargo de reparar ordenadores y consolas de videojuegos. La empresa dispone de dos talleres de reparación. El primero puede emplear 300 horas de trabajo, y necesita emplear 6 horas para cada ordenador y 5 para cada consola. El segundo dispone de 200 horas y necesita 2 horas para reparar cada ordenador y 5 para cada consola. Las ganancias netas que obtiene la empresa son de 100 euros por ordenador y 100 por consola.

¿Qué cantidades deben repararse de cada artículo para maximizar la ganancia de la empresa?.

- **INVERSIÓN**

Un inversor dispone de 100000 euros. La rentabilidad de los bonos A es del 12% y desgravan, además un 15% en la Declaración de Hacienda. Los bonos B tienen una rentabilidad del 15%, pero no desgravan. Por cada euro invertido en bonos A es preciso invertir dos en bonos B. ¿Cuánto dinero se debe colocar en cada tipo de bonos para que el rendimiento sea máximo?.

- **DIETA ADELGAZANTE**

Durante un régimen de adelgazamiento, en una farmacia nos ofrecen dos compuestos A y B, para que tomemos una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes recomendaciones:

No debemos tomar más de 150 gramos de la mezcla ni menos de 50 gramos.
Debemos tomar siempre más cantidad de A que de B.
No debemos incluir más de 100 gramos de A.
100 gramos de A contienen 30 miligramos de vitaminas y 450 calorías.
100 gramos de B contienen 20 miligramos de vitaminas y 150 calorías.

¿Cuántos gramos debemos tomar de cada compuesto para obtener el preparado más rico en vitaminas?. ¿Y el más pobre en calorías?.

- **TRANSPORTE**

Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8000 y 15000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10000, 7000 y 6000 piezas, respectivamente. Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza, son los que aparecen en la siguiente tabla:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Factoría 1	6	13	2
Factoría 2	4	4	12

¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?.

- **UNA EXCURSIÓN**

Doscientas personas quieren organizar una excursión con cierta empresa que dispone de cuatro autobuses de 40 plazas cada uno y cinco autobuses de 50 plazas cada uno. El alquiler de un autobús grande es de 180 euros, y el alquiler de uno pequeño es de 120 euros. ¿Qué combinación de autobuses minimiza el coste de la excursión si la empresa dispone de cinco conductores?.

- **ONG**

Una ONG se propone crear centros básicos de salud primaria en un país centroamericano y en otro africano. Para estos centros hacen falta ambulancias, médicos y dinero. La ONG dispone de 20 ambulancias, 40 médicos y 2’7 millones de euros. Las necesidades de cada centro dependen del país. En el país centroamericano son necesarios: 2 vehículos, 2 médicos y 0’3 millones de euros por centro; en el país africano: 1 vehículo, 3 médicos y 0’1 millones de euros por centro. ¿Cuál es el máximo número de centros que puede financiar dicha organización?.

En cada centro creado en el país centroamericano pueden ser asistidas 6000 personas, mientras que en los centros del país africano lo serían 2500. ¿Cuántos centros deberían construirse en cada país para que el número de personas beneficiadas sea máximo?.

¿Sobrarían recursos a la ONG en algún caso?. ¿Qué propondrías para un mejor aprovechamiento de los mismos?.

ANÁLISIS DE FUNCIONES CON MUPAD

Introducción

A continuación presentamos un conjunto de actividades desarrolladas con el programa MuPad, en las que se tratan los siguientes contenidos:

Representación gráfica de funciones: polinómicas, racionales, trascendentes, etc.

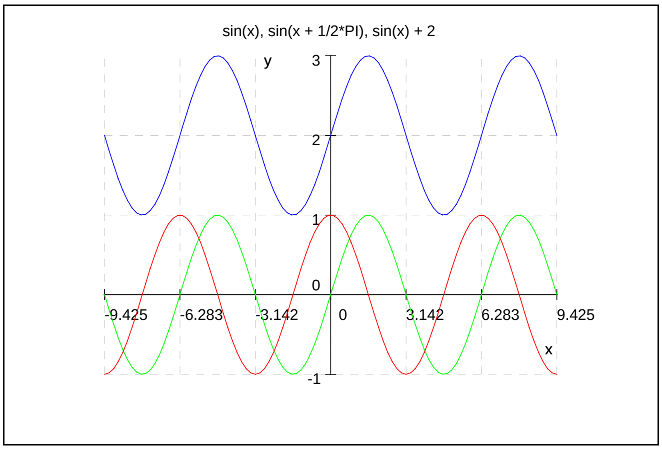
Estudio local de funciones: límites, derivadas, asíntotas, continuidad, monotonía y curvatura.

Integrales: Integral indefinida, integral definida, cálculo de áreas, volúmenes y superficies de revolución..

1. Gráficas

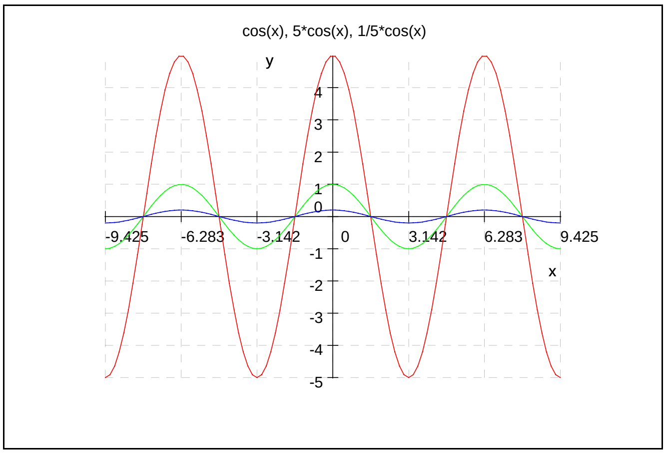
Representar gráficamente las siguientes funciones:
a. y = senx **b. y = sen(x+π/2)** **c. y = 2+senx**

- plotfunc2d(sin(x),sin(x+PI/2),2+sin(x), x=-3*PI..3*PI, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=PI,Steps=1])



Representar gráficamente:
a. y = cosx **b. y = 5cosx** **c. y = (cosx)/5**

- plotfunc2d(cos(x),5*cos(x),cos(x)/5, x=-3*PI..3*PI, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=PI,Steps=1])



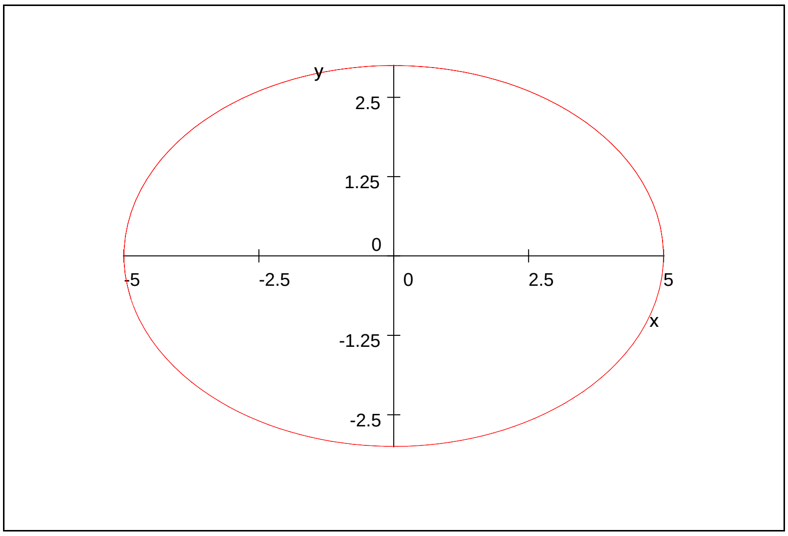
Representar gráficamente e identifica la curva (funciones dadas de forma implícita):

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

Lo primero que haremos es exportar la función **implicit** de la librería **plot**, para utilizar directamente **implicit** y no **plot::implicit**

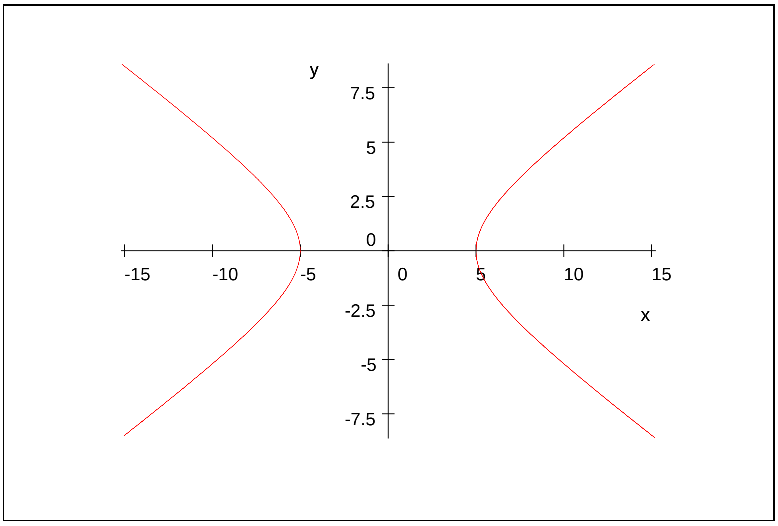
- export(plot,implicit)
  Info: 'plot::implicit' already is exported.

- plot(implicit(x^2/25+y^2/9=1, x=–10..10, y=–10..10))



es una elipse de semiejes 5 y 3.

- plot(implicit(x^2/25–y^2/9=1, x=–15..15, y=–10..10))

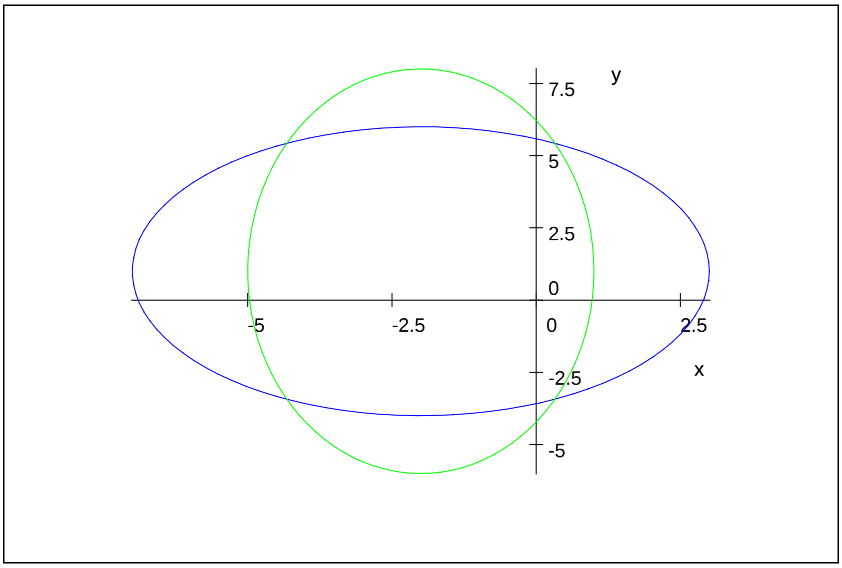


es una hipérbola de semiejes 5 y 3.

Representa las siguientes curvas en paramétricas:

$$a.\begin{cases} x = -2 + 5\cos t \\ y = 1 + 5 sent \end{cases} \quad b.\begin{cases} x = -2 + 3\cos t \\ y = 1 + 7 sent \end{cases}$$

- plot2d([Mode=Curve,[–2+5*cos(t),1+5*sin(t)], t=[0,2*PI], Color=[Flat, RGB::Blue]],
  [Mode=Curve, [–2+3*cos(t),1+7*sin(t)], t=[0,2*PI], Color=[Flat, RGB::Green]])



2. Límites y continuidad

Obtener información acerca de la función limit. Comprobar el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0, \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{senx} = 1, \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\ln x} = \infty, \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{x}\right)^x = e^{\pi}, \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 0$$

- info(limit)

limit -- calculate limits [try ?limit for options]

- ?limit
- limit(sin(x)/x,x=0),limit((1-cos(x))/x,x=0),limit(ln(x),x=0,Left)

  $1, 0, -\infty$

- limit(x^(sin(x)),x=0),limit((1+1/x)^x,x=0),limit(ln(x)/e^x, x=0)

  $1, 1, -\infty$

- limit(x^(ln(x)),x=0),limit((1+PI/x)^x,x=infinity),limit(2/(1+exp(-1/x)),x=0,Left)

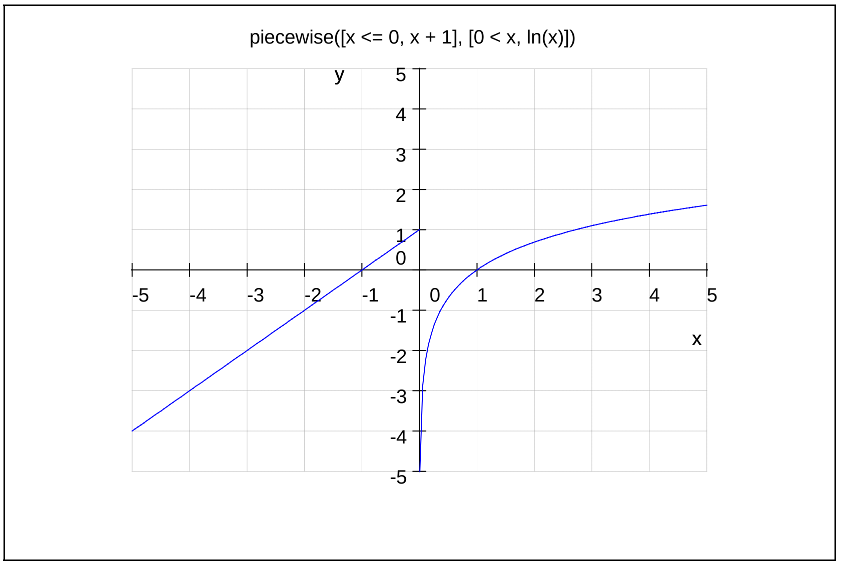
  $\infty, e^{\pi}, 0$

Estudiar la continuidad de la función: $y = \begin{cases} x+1 & si \quad x \le 0 \\ \ln x & si \quad x > 0 \end{cases}$

- f(x):=piecewise([x<=0, x+1],[x>0, ln(x)])

$$\begin{cases} x+1 & \text{if } x \le 0 \\ \ln(x) & \text{if } 0 < x \end{cases}$$

- plotfunc2d(f(x), x=-5..5, y=-5..5, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=1,Steps=1])



1º. Existe la función en el punto x = 0.

- `eval(subs(f(x), x = 0))`

1

2º. ¿Existe el límite de f(x) en x = 0?, gráficamente observamos que no existe ya que por la izquierda es 1 y por la derecha es -infinito. Por lo tanto se trata de una discontinuidad de salto infinito.

- `limit(f(x), x=0, Left)`

1

- `limit(f(x), x=0, Right)`

$-\infty$

3. Representación gráfica de funciones

Representar gráficamente la función y = $x^4 - 6x^2 + 5$ y hallar:

a. Cortes con los ejes.

b. Dominio y recorrido.

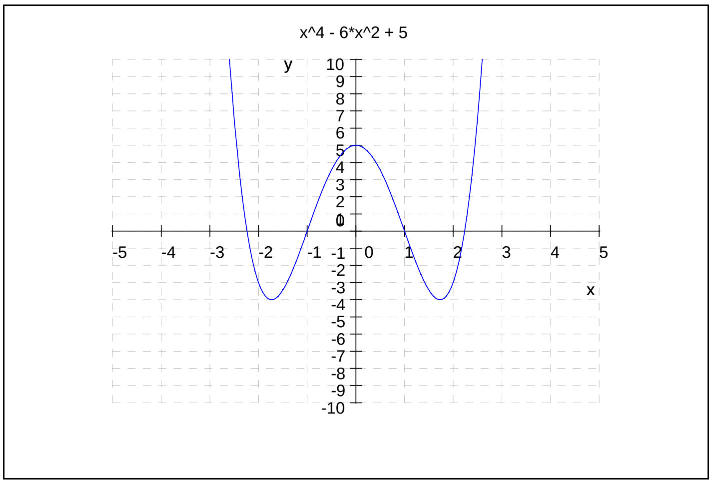
c. Máximos y mínimos. Intervalos de monotonía.

d. Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad.

e. Asíntotas.

Representación gráfica y cortes con los ejes:

- plotfunc2d(x^4-6*x^2+5, x=-5..5, y=-10..10, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=1,Steps=1])



Cortes con los ejes:

a. Eje OX (y = 0), se observan cuatro cortes.

- solve(x^4-6*x^2+5=0, x)

  $\{-1, 1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

- float(%)

  $\{-2.236067977, -1.0, 1.0, 2.236067977\}$

b. Eje OY (x = 0), se observa un corte.

- `subs(x^4-6*x^2+5, x = 0)`

  5

Dominio y recorrido:

Dominio = **R**. (es una función polinómica que cuyo dominio es todo **R**. Lo podemos observar en la gráfica.)

Recorrido = **[–4,+∞[**, como se observa en la gráfica.

Máximos y mínimos. Intervalos de monotonía.

Hallemos los puntos críticos (f’(x) = 0), utilizando MuPAD

- f:=x->x^4–6*x^2+5

  $x \rightarrow x^4 - 6 \cdot x^2 + 5$

- f '(x)

  $4 \cdot x^3 - 12 \cdot x$

Calculemos los puntos críticos, puntos que anulan a la derivada primera. Estos puntos (junto con los de no definición de la función) nos indicarán los intervalos de crecimiento:

- solve(%=0, x)

  $\{0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$

Calculemos la derivada en los puntos intermedios para saber si la función es creciente o decreciente en los distintos intervalos

```
y'(2)=f'(-2), y'(-1)=f'(-1), y'(1)=f'(1), y'(2)=f'(2)
```

$y'(2) = -8,\ y'(-1) = 8,\ y'(1) = -8,\ y'(2) = 8$

Calculemos las imágenes de los puntos críticos:

- `y(0)=f(0), y(sqrt(3))=f(sqrt(3)), y(-sqrt(3))=f(-sqrt(3))`

  $y(0) = 5,\ y(\sqrt{3}) = -4,\ y(-\sqrt{3}) = -4$

Los intervalos de crecimiento son:

Variable Ind.(x)	(–∞, –√3)	–√3	(–√3, 0)	0	(0,√3)	√3	(√3,+ ∞)
Derivada (y')	–	**0**	+	**0**	–	**0**	+
Función(y)	Decre.	**–4 (min.)**	Crec.	**5 (max)**	Decre.	**–4 (min.)**	Crec.

Los mínimos relativos son (–√3,-4) y (√3,–4).
El máximo relativo es (0,5).

Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad:

- f:=x->x^4–6*x^2+5

  $x \rightarrow x^4 - 6 \cdot x^2 + 5$

- y'(x)=f'(x), y"(x)=f"(x)

  $y'(x) = 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x,\ y''(x) = 12 \cdot x^2 - 12$

Calculemos los puntos que anulan a la derivada segunda. Estos puntos (junto con los de no definición de la función), nos indicarán los intervalos de concavidad.

- solve(f"(x),x)

  $\{-1,\ 1\}$

Calculemos la derivada segunda en puntos intermedios para saber si la función es cóncava o convexa:

- y"(-2)=f"(-2); y"(0)=f"(0); y"(2)=f"(2)

  $y''(-2) = 36$

  $y''(0) = -12$

  $y''(2) = 36$

Calculemos las imágenes de los posibles puntos de inflexión:

- y(-1)=f(-1), y(1)=f(1)

  $y(-1) = 0,\ y(1) = 0$

Los intervalos de concavidad son:

Variable Ind.(x)	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1,+\infty)$
Derivada (y'')	+	**0**	–	**0**	+
Función(y)	Cóncava hacia arriba.	**0 (punto de inflexión.)**	Cóncava hacia abajo	**0 (punto de inflexión)**	Cóncava hacia arriba.

Los puntos de inflexión son: (–1,0) y (1,0).

e. Asíntotas: No tiene pues se trata de una función polinómica de grado mayor que 1.

La cantidad de personas afectadas por una epidemia de gripe se ajusta a la fórmula C(t) = 20.000/(1+19e$^{-1,2t}$), donde *t* es el número de semanas transcurridas desde el primer brote de la enfermedad. Se pide:

a. ¿Cuántas personas habrán contraído la enfermedad a las 2 semanas?

b. ¿Cuál es la tasa crecimiento de los afectados en el momento de cumplirse la segunda semana?

Solución: a. C(2) = 7.343 personas aproximadamente.
b. C'(2) = 5.576 personas por semana aproximadamente.

- C:= t->20000/(1+19*exp(-1.2*t))

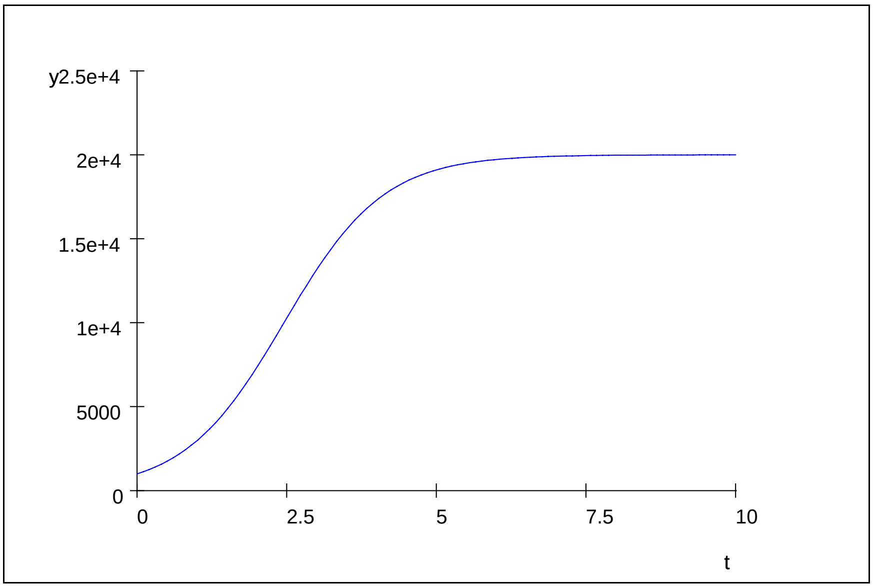
$$t \to \frac{20000}{1 + 19 \cdot e^{-1.2 \cdot t}}$$

- C(2); C'(2)

7343.111362

5576.456566

- plotfunc2d(C(t), t=0..10, y=0..25000)



4. Derivadas e integrales

Calcular las siguientes derivadas:

a. $y=\frac{1}{x-2}$ b. $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ c. $y=e^{-x^2}$ d. $y=\sec 2x$

e. $y=\cot g^2 x$ f. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ g. $y=\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$

h. $y=\ln(x^2-3x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

- a=diff(1/(x-2), x), b=diff(sqrt(x)/(x^2), x)

$$a=-\frac{1}{(x-2)^2},\ b=-\frac{3}{2\cdot x^{\frac{5}{2}}}$$

- c=diff(exp(-x^2), x), d=diff(sec(2*x), x)

$$c=-2\cdot x\cdot e^{-x^2},\ d=\frac{2\cdot\sin(2\cdot x)}{\cos(2\cdot x)^2}$$

- e=diff((cot(x))^2, x), f=diff(arctan(sqrt(x)), x)

$$e=2\cdot\cot(x)\cdot(-\cot(x)^2-1),\ f=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(x+1)}$$

- g=diff(ln((x^2-1)/(x^2+1)),x)=simplify(diff(ln((x^2-1)/(x^2+1)),x))

$$\left(g=\frac{(x^2+1)\cdot\left(\frac{2\cdot x}{x^2+1}-\frac{2\cdot x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\right)}{x^2-1}\right)=\frac{4\cdot x}{x^4-1}$$

- h=diff(ln(x^2-3*x)*cos(1/x), x)

$$h=\frac{\sin(\frac{1}{x})\cdot\ln(x^2-3\cdot x)}{x^2}+\frac{\cos(\frac{1}{x})\cdot(2\cdot x-3)}{x^2-3\cdot x}$$

Calcular las siguientes integrales:

$a.\int senx\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot dx$ $b.\int e^{2x}\cdot senx\cdot dx$ $c.\int\frac{5x-2}{2x^2-2x+1}$ $d.\int\frac{\cos^3 x}{1+senx}dx$

$a.\int senx\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot dx$

- int(sin(x)*cos(2*x)*cos(3*x), x)

$$\frac{\cos(4\cdot x)}{16}-\frac{\cos(2\cdot x)}{8}-\frac{\cos(6\cdot x)}{24}$$

$$b.\int e^{2x}\cdot senx\cdot dx$$

- int(exp(2*x)*sin(x), x)

$$\frac{2\cdot\sin(x)\cdot(e^{x})^{2}}{5}-\frac{\cos(x)\cdot(e^{x})^{2}}{5}$$

- factor(%)

$$\frac{(e^{x})^{2}\cdot\left(-\cos(x)+2\cdot\sin(x)\right)}{5}$$

$$c.\int\frac{5x-2}{2x^{2}-2x+1}$$

- int((5*x-2)/(2*x^2-2*x+1), x): factor(%)

$$\frac{-\pi+2\cdot\arctan\left(2\cdot x-1\right)+5\cdot\ln(-x+x^{2}+\frac{1}{2})}{4}$$

$$d.\int\frac{\cos^{3}x}{1+senx}dx$$

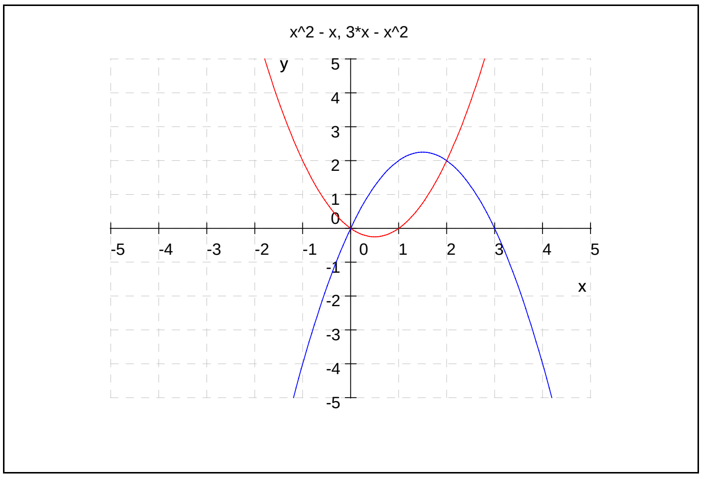
- int((cos(x))^3/(1+sin(x)), x): factor(%)

$$\frac{4\cdot\sin(x)+\cos\left(2\cdot x\right)}{4}$$

Hallar el área de la región acotada del plano que está encerrada entre las dos parábolas y = x^2-x, y = 3x-x^2.

Dibujemos una gráfica de ambas funciones para situar el problema:

- plotfunc2d(x^2-x, 3*x-x^2, x=-5..5, y=-5..5, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=1, Steps=1])



Se observa en la gráfica que las dos parábolas se cortan en los puntos x = 0 y x = 2.

Por tanto el área buscada será A $\int_0^2 (3x-x^2)-(x^2-x)dx$ =

- int((3*x-x^2)-(x^2-x), x=0..2)

$$\frac{8}{3}$$

ACTIVIDADES

1. Calcular los siguientes límites:

$$a.\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+2)^2}{x}\quad b.\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-x\quad c.\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{x^2-6x+9}\quad d.\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$$

$$e.\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2+x-2}\quad f.\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^3}\quad g.\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)(tg(\frac{\pi x}{2}))\quad h.\lim_{x\to 0^+}(senx)^x\quad i.\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

2. La eficacia de un analgésico *t* horas después de ser administrado viene dada por la expresión $E(t) = sen^2 t$ *(con* $t\leq\pi$*)*. Calcular:

    a. La variación de la eficacia (mejoría) cuando t = 3.
    b. El instante en el que la mejoría vale 1.

3. Hallar los máximos y mínimos, si los tiene , de la función $y = x^2/(x^2-9)$. ¿Tiene puntos de inflexión?.

4. ¿Es derivable la función $f(x)=\begin{cases} x+3 \; si \; x>0 \\ x^2+3 \; si \; x\leq 0\end{cases}$ en x = 0?

5. Representar gráficamente las funciones y calcular:
    a. Cortes con los ejes.
    b. Dominio y recorrido.
    c. Máximos y mínimos. Intervalos de monotonía.
    d. Puntos de inflexión. Intervalos de concavidad.
    f. Asíntotas.

    Para las siguientes funciones:

    a. $y = (-x^2+x)/(x+1)$ b. $y = x^4-2x^2$ c. $y = \ln(x^2-x)$ d. $y = x/e^x$.

6. Calcular las siguientes integrales:

$$a.\int\frac{senx}{\sqrt{\cos x}}dx\quad b.\int\frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx\quad c.\int\frac{sen2x}{2+\cos 2x}dx\quad d.\int(x^2+x+2)senx dx\quad e.\int\sqrt[3]{1-x^2}\cdot x\cdot dx\quad f.\int x^2\cdot e^{-3x}dx$$

7. Hallar el área comprendida:
    a. Entre el eje OX y la curva $y = x^3-6x^2+8x$.
    b. Entre la parábola $y = x^2+2$ y la recta $y = x+4$.
    c. Entre las parábolas $y = 6x-x^2$ e $y = x^2-2x$
    d. Entre el eje OX y las curvas $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.
    e. Entre el eje OX y las curvas $x\cdot y = 8$, $x = y^2$.

8. Hállese el área de la superficie generada por el arco de parábola $y^2 = x$ comprendido entre (0,0) y (1,1) cuando éste gira 2π Rad. en torno al eje X.