LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

1. ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA CON PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO

MAURICIO CONTRERAS

CÁLCULO SIMBÓLICO

Introducción

Existen muchos programas informáticos adecuados para estudiar álgebra. Uno de ellos es DERIVE. Se trata de un asistente matemático muy indicado para representar gráficamente funciones, calcular límites, derivadas e integrales, pero también para resolver ecuaciones y sistemas, operar con matrices, etc. DERIVE no es el único programa de este tipo. También tiene cada vez más uso el programa MATHEMATICA y otros asistentes matemáticos, como MUPAD. Sin embargo, DERIVE es el más sencillo de manejar, y por tanto, es muy recomendable su uso en Bachillerato, especialmente en su versión para Windows.

1. Operaciones con expresiones

El programa **DERIVE PARA WINDOWS** está especialmente diseñado para efectuar operaciones con expresiones algebraicas, así como para calcular límites de sucesiones y funciones, derivadas, integrales, etc. Veamos como se utiliza en casos concretos.

Haz clic en **Inicio / Programas / Derive para Windows / Derive para Windows**. Observa que se abre la ventana de Derive, que presenta una fila de menús y una barra de herramientas.

Los menús disponibles son: **Archivo**, **Edición**, **Editar(Autor)**, **Simplificar**, **Resolver**, **Cálculo**, **Definir**, **Opciones**, **Ventana**, **Ayuda**. Efectúa un paseo con el ratón por cada uno de los menús.

La barra de herramientas consta de los siguientes botones: **Nuevo**, **Abrir**, **Guardar**, **Imprimir**, **Borrar expresiones**, **Recuperar**, **Renumerar**, **Editar expresión**, **Editar un vector**, **Editar una matriz**, **Simplificar**, **Aproximar**, **Resolver**, **Sustituir variables**, **Calcular límites**, **Calcular derivadas**, **Calcular integrales**, **Calcular sumatorios**, **Calcular productos**, **Gráficos 2D**, **Gráficos 3D**. Sitúa el puntero del ratón sobre cada uno de los botones y aparecerá una pista junto con una descripción en la barra de estado.

Derive dispone de tres ventanas: la ventana algebraica, la ventana **Gráficos 2D** y la ventana **Gráficos 3D**. En la ventana algebraica se introducen y editan expresiones algebraicas. En la ventana **Gráficos 2D** hacemos representaciones en el plano y en la ventana **Gráficos 3D**, representaciones en el espacio. La disposición de las ventanas se puede controlar en el menú **Ventana**, siendo posible distribuirlas en mosaico vertical u horizontal y en cascada.

1.– Introducir expresiones

Haz clic en el botón **Editar expresión** y, en la caja de texto, introduce la expresión **1/2+2/3** y pulsa ENTER. Aparece dicha expresión en el área de trabajo. Con dicha expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa el resultado. Para mostrar el resultado en forma decimal, pulsa el botón **≈ Aproximar**.

2.–Medida de ángulos

Por defecto, Derive trabaja los ángulos expresados en radianes. Para introducir un ángulo en grados sexagesimales, hay que añadir el símbolo º a continuación del valor del ángulo. Por ejemplo, edita la expresión **sin(45º)** y haz clic en el botón **Simplificar**. Observa que en pantalla aparece $\sqrt{2}/2$. Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **≈ Aproximar** y observa el resultado.

3.– Resaltar expresiones y subexpresiones

Para seleccionar una expresión basta hacer clic sobre ella. Si una expresión ya está seleccionada, al volver a hacer clic sobre ella, se selecciona una parte de ella (una subexpresión).

4.– Calcular un valor aproximado

Selecciona la expresión $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ y haz clic sobre el botón ≈ **Aproximar**. En el siguiente cuadro de diálogo, observa que puedes indicar a Derive con cuántos dígitos debe mostrar el resultado. Indica 8 dígitos de precisión y haz clic en **Aproximar**. Observa el resultado.

5.–Incorporar la expresión seleccionada a una nueva expresión

Selecciona la expresión $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ y haz clic en el botón **Editar expresión**. Cuando el cursor aparezca sobre la caja de texto, pulsa la tecla **F3** y verás como se copia la expresión seleccionada. A continuación teclea **+ 3 / 5** y haz clic en **Sí**. Con la expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa el resultado. Con la misma expresión seleccionada, haz clic en el botón ≈ **Aproximar** y obtendrás el resultado de la suma $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$ en forma decimal, con la precisión indicada.

6.– Eliminar y recuperar expresiones

Selecciona la opción **Eliminar** del menú **Edición**. En el siguiente cuadro de diálogo, introduce en **Inicio 2** y en **Final** 4, para indicar a Derive que quieres eliminar las expresiones segunda, tercera y cuarta. Haz clic en **Sí** y observa el resultado.

Haz clic en **Edición / Recuperar**. En la siguiente ventana debes introducir el número de expresión delante de la cual quieres insertar las expresiones anteriormente eliminadas, por ejemplo, 1. Pulsa ENTER y observa el resultado.

- **<u>OPERACIONES NUMÉRICAS</u>**

1.– Operaciones elementales

Efectúa la operación: $\mathbf{350\ (67 + 193) + 5^7 - \sqrt{529} - \sqrt[6]{248832}}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: 350(67+193)+5^7*$\sqrt{\ }$ 529–248832^(1/5). Haz clic en el botón **Sí** y haz clic en **= Simplificar**. Comprueba que el resultado es 1887863.

2.– Operaciones avanzadas

Efectúa la operación: $\mathbf{12! + \binom{19}{4} + \ln 523 - \log 97 + \log_5 46}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe:
12! + comb(19, 4) + ln 523 – log(97, 10) + log(46, 5). Selecciona el botón **Sí** y haz clic en el botón ≈ **Aproximar**. Obtendrás como resultado $4.79005 \cdot 10^8$.

3.– Operaciones con números racionales

Calcula: $\mathbf{\frac{2}{9} - 4 + \frac{1}{6} : \frac{3}{5}}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y escribe: 2 / 9 – 4 + (1/6)/(3/5), elige el botón **Sí** y haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado $-\frac{7}{2}$.

4.– Operaciones en notación científica

Calcula: $\mathbf{9{,}67 \cdot 10^{11} : \left(6{,}8 \cdot 10^{-23} \right)}$

Elige **Definir/Modos de operar/Salida** y escoge en la casilla **Notación: Científica**. Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: 9.67*10^11/(6.8*10^(–23)). Haz clic en el botón **Sí** y haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado1.42205·10^{34}. Elige **Definir/Modos de operar/Reajustar todo**.

5.– Expresiones decimales

Halla la expresión decimal con 40 decimales de $\mathbf{\frac{22}{7}}$. Si es periódico, escríbelo en forma periódica.

Elige **Definir/Modos de Operar/Salida** y escribe en la casilla **Dígitos: 40**. Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: 22/7. Pulsa el botón **Sí** y haz clic **en ≈ Aproximar**. Obtendrás como resultado: 3.142857142857142857142857142857142857142857142. Vemos que $\frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$

6.– Racionalización

Racionaliza la expresión: $\mathbf{\frac{12}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: 12 / ($\sqrt{5} + \sqrt{2}$). Haz clic en el botón **Sí** y haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado: $4\sqrt{5} - 4\sqrt{2}$

ACTIVIDADES

- **EXPRESIONES ARITMÉTICAS**

Utilizando Derive efectúa las siguientes operaciones aritméticas (para ello, edita las expresiones y haz clic en = Simplificar y en ≈ Aproximar).

a) $\left(\frac{5}{3} + \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)$

b) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{5}}{\frac{2}{7} - \frac{5}{2}}$

c) $\sqrt{24} - 3\sqrt{6} + \sqrt{54}$

d) $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 - 10 + 2 \cdot 10^{-1}$

- **MÁS EXPRESIONES**

Introduce y simplifica directamente para calcular su valor, las siguientes expresiones:

a) $\text{sen } 45^o - \cos 45^o$ b) $\text{tg}^2\, 30^o$ c) 9! d) $\ln\left(e^2\right)$

- **EXACTO Y APROXIMADO**

Calcula el valor exacto y el aproximado de las siguientes expresiones: a) sen (π/4) b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$.

- **RAICES**

a) Introduce la siguiente expresión aritmética y simplifícala para obtener su resultado: $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{9}}}$

b) A partir de la expresión anterior, obtén el valor de la expresión $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{9}}$

- **RACIONALIZA**

Racionaliza las siguientes expresiones: a) $\dfrac{6}{\sqrt{8}}$ b) $\dfrac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{16}{\sqrt{5}+3}$

- **MODO APROXIMADO**

Calcula en modo aproximado con 10 dígitos: a) ln 34 b) log 3,45 c) $\log_2 7$ d) $\sqrt[7]{23^4}$

2. Operaciones algebraicas

1.– Polinomios

Calcula el cociente y el resto de la división: $\left(2x^5 - 9x^4 + 22x^2 - 27x + 3\right):\left(x^2 - 3x + 4\right)$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $\text{quotient}\left(2x\wedge 5 - 9x\wedge 4 + 22x\wedge 2 - 27x + 3,\ x\wedge 2 - 3x + 4\right)$. Haz clic en el botón **Sí** y haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado: $2x^3 - 3x^2 - 17x - 17$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $\text{remainder}\left(2x\wedge 5 - 9x\wedge 4 + 22x\wedge 2 - 27x + 3,\ x\wedge 2 - 3x + 4\right)$. Haz clic en el botón **Sí** y haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado: $-10x + 71$.

2.– Valor numérico de un polinomio

Calcula el valor numérico del polinomio $x^4 - 3x^2 + 5x - 7$ para x = 2.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe $x\wedge 4 - 3x\wedge 2 + 5x - 7$. Elige el botón **Sí**. Haz clic en el botón **SUB Sustituir variables** y en la caja **Sustitución** introduce **2** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado 7.

3.– Binomio de Newton

Desarrolla la potencia: $\mathbf{(x-3)^5}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $(x-3)\hat{}5$. Pulsa el botón **Sí**. Selecciona el menú **Simplificar / Expandir** y haz clic en el botón **Expandir**. Obtendrás como resultado: $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$

4.– Descomposición factorial

Halla la descomposición factorial del polinomio: $\mathbf{x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 52x - 60}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $x\hat{}4 - 6x\hat{}3 - 3x\hat{}2 + 52x - 60$. Pulsa el botón **Sí**. Selecciona el comando **Simplificar / Factorizar** y haz clic en el botón **Factorizar**. Obtendrás como resultado: $(x+3)\cdot(x-5)\cdot(x-2)^2$

5.– Resolución de ecuaciones

Ejemplo 1.– Resuelve la ecuación: $\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $3x\hat{}2 + 5x - 2 = 0$. Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Resolver** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado: [x = –2, x = 1/3].

Ejemplo 2.– Un padre y su hijo trabajan con el mismo empresario. El padre recibe 500 euros después de cierto número de días trabajados, el hijo que ha trabajado 5 días menos tan sólo recibe 240 euros. Halla el número de días de trabajo y el salario por día de cada uno, sabiendo que el salario por día del hijo es inferior en 8 euros al del padre.

Sea x el número de días trabajados por el padre. Entonces el hijo ha trabajado x–5 días. Además, el salario por día del padre es: 500 / x euros. Por tanto, el salario por día del hijo será $\frac{500}{x} - 8$ euros. Entonces debe cumplirse: $(x-5)\cdot\left(\frac{500}{x} - 8\right) = 240$. Se trata, pues, de resolver esta ecuación. Para ello usaremos el programa Derive.

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $(x-5)\cdot\left(\frac{500}{x} - 8\right) = 240$. Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Resolver** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado $\left[x = 25,\ x = \frac{25}{2}\right]$. Con esta expresión seleccionada, haz clic en ≈ **Aproximar** y obtendrás como resultado $[x = 25, x = 12.5]$. Por tanto, el padre trabajó 25 días y el hijo 20 días. Aunque otra solución es que el padre trabajó 12.5 días y el hijo 7,5 días, si admitimos que es posible trabajar solamente medias jornadas.

6.– Resolución de inecuaciones

Resuelve la inecuación: $\mathbf{x^2 - 7x + 10 > 0}$

Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: $\mathbf{x\,\hat{}\,2 - 7x + 10 > 0}$. Haz clic en el botón **Sí**. Haz clic en el botón **Resolver** y pulsa el botón **Simplificar**. Obtendrás como resultado: [x<2, x>5].

ACTIVIDADES

- **FRACCIONES ALGEBRAICAS**

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas: a) $\dfrac{x}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}$ b) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}}$

- **OPERACIONES CON POLINOMIOS**

Realiza las siguientes operaciones con polinomios: a) $(2x-3)\cdot(2x+3)$ b) $\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x^2-3x-4}$

- **DESARROLLOS**

Obtén la expresión desarrollada de los siguientes polinomios:

a) $2x - 2\cdot(x^2-4) + 4x^2 - (2x-3)^3$ b) $(x-2)^3$

- **FACTORES**

Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$ b) $x^4 - 18x^2 + 81$

- **FACTORIZACIÓN**

Descompón en factores los siguientes números: a) 1328 b) 1128960

- **VALOR NUMÉRICO**

¿Cuál es el valor del polinomio $x^4 - 2x^2 + 1$ para x = 5 ?.

- **RAÍCES**

Obtén las raíces de los siguientes polinomios: a) $x^4 - 2x^2 + 1$ b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

- **INECUACIONES**

Halla las soluciones de las siguientes desigualdades:

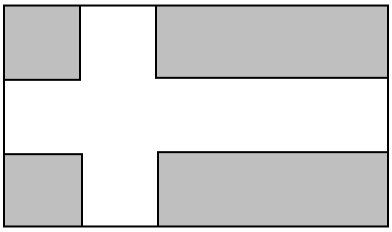
a) $x(x-1) > x^2 + 3x + 1$ b) $4x^2 - 3x < 0$

- **LA BANDERA**

La bandera danesa está formada por una cruz blanca sobre fondo gris. ¿Cuál debe ser la longitud de las bandas para que el área de la superficie blanca sea igual al área de la superficie gris?.

a) En un primer caso, suponemos que la bandera tiene por dimensiones 1,50×1 m.

b) En un segundo caso, suponemos que las dimensiones de la bandera son L y 1.

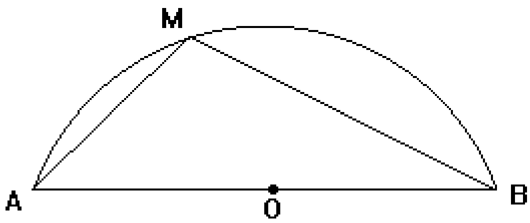


- **EN EL BAÑO**

Una bañera puede contener 140 litros. El grifo de agua caliente suministra 15 litros por minuto. Utilizando sólo el grifo de agua fría (primer caso), el llenado de la bañera cuesta tres minutos más que con los dos grifos (segundo caso). Calcula el suministro d del grifo del agua fría y el tiempo de llenado en cada uno de los dos casos.

- **TRIÁNGULO Y SEMICÍRCULO**

El semicírculo de diámetro AB tiene 7,5 cm de radio. El triángulo AMB tiene por perímetro 36 cm. Determina las longitudes de los lados del triángulo AMB.



- **ECUACIONES**

Resuelve las siguientes ecuaciones y representa gráficamente las funciones correspondientes, para comprobar que las soluciones reales coinciden con las abcisas de los puntos de corte con el eje OX:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x^2 - 10x + 25 = 0$ c) $x^2 - 10x + 26 = 0$

d) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ f) $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$

VECTORES CON DERIVE

Introducción

Con DERIVE podemos editar y operar algebraicamente con vectores, así como resolver problemas geométricos en los que interviene el producto escalar, vectorial y mixto. De esta forma, DERIVE, que es muy apreciado por sus aplicaciones en Cálculo Diferencial e Integral, resulta ser un perfecto asistente matemático en Geometría. En las siguientes actividades se muestran algunos ejemplos.

1. Edición de vectores

Un vector está constituido por un número determinado de componentes, por lo que, para definirlo, deberán introducirse todos sus elementos. Los pasos que deben seguirse son:

a) Seleccionar la opción **Vector** del menú **Editar** o haz clic en el botón **Editar Vector**.

b) Indicar el número de elementos del vector y hacer clic sobre el botón **Sí**.

c) Escribir los distintos elementos del vector y hacer clic sobre el botón **Sí**.

Los elementos del vector quedan escritos entre corchetes y separados por comas.

Ejemplo.– Define el vector u = (2, –3, 1)

- Selecciona el comando **Editar / Vector** o haz clic en el botón **Editar Vector**. En la caja **Elementos** introduce **3** para indicar que el vector tendrá tres componentes. Haz clic en el botón **Sí**.

- En cada una de las cajas de texto escribe las componentes del vector: 2, –3 y 1. Haz clic en el botón **Sí**. Observa que en pantalla aparece [2, –3, 1].

Otro método alternativo para escribir un vector, útil cuando sus elementos pertenecen a una sucesión de números, está basado en el cálculo de los distintos elementos del vector. Consta de los siguientes pasos:

a) Seleccionar el comando **Vector** del menú **Cálcular**.

b) Introducir el término general de la sucesión a la que pertenecen los elementos del vector.

c) Indicar la variable, la posición del primer y del último elemento del vector dentro de la sucesión y cada cuántos elementos de la sucesión deben tomarse para el vector.

d) Hacer clic en el botón **Si**.

e) Simplificar la expresión del vector para que el programa calcule y describa sus elementos.

Ejemplo.– Edita el vector cuyas componentes son los cuadrados de los cuatro primeros números naturales.

- Selecciona el comando **Calcular / Vector**. En la caja de texto introduce la fórmula de la sucesión: x^2 .

- En la caja de texto **Variable** comprueba que está seleccionada la x. En **Valor inicial**, escribe 1 y en **Valor final**, escribe 4. En **Tamaño de paso**, escribe 1. Haz clic en el botón **Sí**.

- Observa que en la pantalla aparece el comando VECTOR(x^2, x, 1, 4, 1). Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que obtienes el vector [1, 4, 9, 16].

ACTIVIDADES

- **EDITA VECTORES**

Edita los siguientes vectores: a) (2, 3, –1) b) $\left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)$

c) Un vector cuyas componentes sean los cubos de los cinco primeros números naturales.

d) Un vector cuyas componentes sean los cuadrados de los números naturales comprendidos entre 2 y 10, con un paso de 2 unidades.

2. Operaciones con vectores

- **MÓDULO DE UN VECTOR**

Ejemplo.– Calcula el módulo del vector u = (3, 4, 5).

- Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: abs[3, 4, 5]. Haz clic en el botón **Sí**.

- Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado $5\sqrt{2}$.

- **PRODUCTO ESCALAR**

Ejemplo.– Calcula el producto escalar de los vectores u = (5, 3, –1) y v = (6, –2, 7).

- Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: [5, 3, –1] · [6, –2, 7]. Haz clic en el botón **Sí**.

- Con la expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que el resultado del producto escalar es 17.

- **PRODUCTO VECTORIAL**

Ejemplo.– Calcula el producto vectorial de los vectores u=(5, –6, 7) y v=(1, 3, –4).

- Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: cross([5, –6, 7], [1, 3, –4]). Haz clic en el botón **Sí**.

- Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que el resultado es el vector: [3, 27, 21].

- **ÁREA DEL PARALELOGRAMO**

Ejemplo.– Calcula el área del paralelogramo definido por los vectores: u=(5, –3, 4) y v=(–7, 1, 2).

- Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: cross([5, –3, 4], [–7, 1, 2]). Haz clic en el botón **Sí**.

- Con esta expresión seleccionada, selecciona el botón **= Simplificar**. Observa que obtienes el vector [–10, –38, –16].

- Con el vector obtenido seleccionado, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: **abs** y pulsa la tecla **F4** para que se inserte a continuación el vector entre paréntesis. Observa que obtienes como resultado $30\sqrt{2}$.

- **PRODUCTO MIXTO**

Ejemplo.– Calcula el producto mixto de los vectores: u = (3, –2, 5), v = (–4, 1, 6) y w = (2, 0, –1)

- Haz clic en el botón **Editar Matriz**, e introduce una matriz 3×3 cuyas filas son los vectores u, v y w.

- Con la fila de la matriz seleccionada en el Editor, haz clic en **Editar expresión**, escribe **det** y pulsa la tecla **F4** para que se inserte a continuación la matriz entre paréntesis.

- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.

- Haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que el resultado es –29.

- **VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO**

Ejemplo.– Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores: u=(3, –5, 4), v=(1, 0, –7) y w=(–5, 4, 9).

Calcula el producto mixto de los vectores: u, v y w, utilizando la técnica anterior:

- Haz clic en el botón **Editar Matriz**, e introduce una matriz 3×3 cuyas filas son los vectores u, v y w.

- Con la fila de la matriz seleccionada en el Editor, haz clic en **Editar expresión**, escribe **det** y pulsa la tecla **F4** para que se inserte a continuación la matriz entre paréntesis.

- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.
- Haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que el resultado es –30.

Halla el módulo del producto mixto obtenido:

- Selecciona el resultado obtenido, –30, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe **abs**. Pulsa **F4** para insertar la selección.
- Haz clic en el botón **Sí** para regresar al Editor.
- Haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que el resultado es 30.
- **ECUACIÓN DEL PLANO**

Ejemplo.– Calcula la ecuación del plano definido por el punto A(2, –4, 7) y los vectores u=(3, 5, –4) y v=(–1, 0, 6)

- Haz clic en el botón **Editar Matriz**, e introduce la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} x-2 & y+4 & z-7 \\ 3 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Con la fila de la matriz seleccionada en el Editor, haz clic en el botón **Editar expresión**, escribe **det** y pulsa la tecla **F4** para que se inserte a continuación la matriz entre paréntesis.
- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.
- Haz clic en el botón **= Simplificar**. Obtendrás como resultado: 30x – 14y + 5z – 151. Es decir, el plano buscado tiene por ecuación: 30 x – 14 y + 5 z – 151 = 0.

ACTIVIDADES

- **MÓDULO**

  Calcula el módulo del vector u = (3, 6, –5).

- **VECTOR UNITARIO**

  Calcula un vector unitario en la dirección del vector v = (3, –7, 9).

- **DISTANCIA**

  Halla la distancia que hay entre los puntos A(–4, –5, 6) y B(8, –7, 2).

- **PRODUCTO ESCALAR**

  Calcula el producto escalar de los vectores u = (4, –7, –2) y v = (–5, 2, 9).

- **PERPENDICULARES**

  Halla el valor del parámetro k para que sean perpendiculares los vectores u = (2, –5, –1) y v = (–7, k, 3).

- **PRODUCTO VECTORIAL**

  Calcula el producto vectorial de los vectores u = (3, –5, –9) y v = (–1, 3, 4).

- **PARALELOGRAMO**

  Halla el área del paralelogramo dado por los vectores u = (–6, 5, 3) y v = (9, –3, 7).

- **TRIÁNGULO**

  Calcula el área del triángulo definido por los vectores u = (5, –7, 1) y v = (0, 2, 7)

- **DISTANCIA PUNTO–RECTA**

  Halla la distancia que hay entre el punto P(3, –7, 8) y la recta: $r = \frac{x-2}{-3} = y-4 = \frac{z+5}{7}$

- **OTRO TRIÁNGULO**

  Calcula el área del triángulo definido por los puntos: A(–6, 2, –7), B(–7, 4, 0) y C(4, –5, 6).

- **PRODUCTO MIXTO**

  Calcula el producto mixto de los siguientes vectores: u = (2, 4, –3), v = (–7, 2, 3) y w = (5, –4, 9).

- **COPLANARIOS**

  Halla el valor de k para que los siguientes vectores sean coplanarios o dependientes: u = (k, 1, 1), v = (1, k, 1) y w = (1, 1, k).

- **PARALELEPÍPEDO**

  Calcula el volumen del paralelepípedo definido por los vectores: u=(–2, 7, –3), v=(–6, 5, 2) y w=(6, –4, 7).

- **TETRAEDRO**

  Halla el volumen del tetraedro definido por los vectores: u=(7, –2, 2), v=(–4, 5, 2) y w=(4, –4, 0).

- **OTRO TETRAEDRO**

  Calcula el volumen del tetraedro definido por los puntos: A(–4, –7, 9), B(2, –7, 4), C(–4, 2, 1) y D(–5, 6, 2).

- **DISTANCIA**

  Halla la distancia que hay entre las rectas: $r = \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-7}{4}$ y $s = \frac{x-8}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{-9}$

- **PLANO**

  Calcula la ecuación general del plano definido por el punto A(–3, 4, 9) y los vectores directores: u = (5, 3, –1) y v = (3, –4, 7).

MATRICES CON DERIVE

Introducción

DERIVE es un programa de cálculo simbólico muy conocido por sus aplicaciones en Cálculo Diferencial. Sin embargo, puede usarse con éxito para trabajar algunos aspectos del álgebra. Por ejemplo, el programa es muy cómodo para estudiar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Permite visualizar los resultados de las operaciones con matrices con suma facilidad. De esta forma, se aminoran las dificultades de cálculo, permitiendo mayor disponibilidad de tiempo para profundizar en los conceptos, interpretando los resultados y situándolos en contexto.

1. Las matrices con Derive

Veamos como se puede usar Derive para trabajar con matrices. Haz doble clic sobre el icono de Derive para Windows, situado en el escritorio, para iniciar el programa. En DERIVE una matriz es un vector de vectores de la misma dimensión, siendo cada uno de estos vectores las filas de la matriz. Podemos introducir una matriz en Derive de varias formas:

a) **Editar Expresión**: escribimos el vector de vectores, utilizando los corchetes. Por ejemplo, al hacer clic en el botón **Editar expresión**, teclear [[2, 3, 5], [1, 0, –3], [0, 2, 7]] y hacer clic en el botón **Sí**, obtenemos la matriz:

$$\#1: \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

b) **Editar Vector**: cada una de las componentes del vector será otro vector, concretamente cada una de las filas de la matriz. Por ejemplo, al hacer clic en el botón **Editar Vector**, aparece un cuadro de diálogo en el que hemos de indicar el número de elementos de vector. Introducimos 3 para indicar que queremos tres filas. En la siguiente ventana introducimos las tres filas del vector. Concretamente, en la primera caja de texto introducimos [–2, 9, 5], en la segunda caja [0, 0, –3] y en la tercera [0, 2, 0]. Al hacer clic en el botón **Sí**, aparece en pantalla la matriz

$$\#2: \begin{bmatrix} -2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

c) **Editar Matriz**: elegimos las dimensiones de la matriz y colocamos cada una de las componentes en su lugar. Por ejemplo, al hacer clic en el botón **Editar Matriz**, aparece un cuadro de diálogo en el que podemos indicar el número de filas y de columnas, en nuestro caso 3 y 3. En el siguiente cuadro de diálogo introducimos los elementos de la matriz. Primera fila: 4, 1, –2. Segunda fila: 0, –1, 0. Tercera fila: 9, 6, 5. Al hacer clic en el botón **Sí**, obtenemos la matriz

$$\#3: \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Podemos poner nombre a las matrices. Para ello hacemos clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto tecleamos **A : =**. Seleccionamos la expresión **#1**, hacemos clic en la caja de texto y pulsamos la tecla **F3**. De esta forma se copiará la primera matriz en la caja de texto. Al hacer clic en el botón **Sí** , se guarda dicha matriz en la variable A y aparece en pantalla:

$$a := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Procede de la misma forma para nombrar la matriz **#2** como **B** y la matriz **#3** como **C**.

2. Operaciones con matrices

a) Suma y resta de matrices

Para sumar o restar matrices (siempre del mismo orden), basta introducir sus nombres separados por los signos + ó –. Ejemplo, al hacer clic en **Editar expresión**, teclear **A+B** en la caja de texto y hacer clic en **Simplificar**, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

También podemos hacer en el botón **Sí**, con lo que aparecerá en pantalla la expresión **a+b**. Una vez seleccionada esta expresión, hacemos clic en el botón **= Aproximar**.

Si editamos la expresión **A–B** y hacemos clic en **Simplificar**, obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

b) Producto de matrices

Para multiplicar matrices debe cumplirse que número de columnas de la primera = número de filas de la segunda. El producto se obtiene introduciendo los nombres de las matrices, separados por el símbolo • . Por ejemplo, al hacer clic en **Editar expresión**, teclear **A•B** y hacer clic en **Simplificar**, se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} -4 & 28 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 14 & -6 \end{bmatrix}$$

También se puede hacer el producto, sin poner ningún símbolo entre los nombres de las matrices. Así, al editar la expresión **BA**, o la expresión **#2 #1** y hacer clic en **Simplificar**, obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & -21 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

También podemos hacer clic en **Editar Expresión**, seleccionar la expresión **#2**, hacer clic en la caja de texto, pulsar **F3**, seleccionar la expresión **#1**, hacer clic en la caja de texto, pulsar **F3** y hacer clic en **Simplificar**. El resultado es la misma matriz.

c) Producto de un escalar por una matriz

Para efectuar el producto de un número por una matriz, basta escribir uno a continuación de otro. Por ejemplo, al editar la expresión **4C** y hacer clic en **Simplificar**, obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 \\ 36 & 24 & 20 \end{bmatrix}$$

d) Potencia de una matriz

Para obtener potencias de exponente entero de una matriz cuadrada, basta hacer clic en **Editar Expresión** y teclear el nombre de la matriz seguido del símbolo ^ y el exponente. Por ejemplo, al editar la expresión **C^3** y hacer clic en **Simplificar**, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} -170 & -101 & -86 \\ 0 & -1 & 0 \\ 387 & 90 & -127 \end{bmatrix}$$

e) Transpuesta de una matriz

Para obtener la transpuesta de una matriz, basta introducir el símbolo de acento grave ` a continuación del nombre de la matriz. Así, al editar la expresión **C` [ESPACIO]** y hacer clic en **Simplificar**, obtenemos la matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

f) Ejemplo

Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$ **y B=**$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$**, calcula: a) A+B; b) A·B**

- Haz clic en el botón [▦] **Editar Matriz**.
- En la ventana que aparece escribe filas: **3** y columnas: **3**, y pulsa el botón **Sí**.
- Introduce los números de la matriz A. Utiliza la tecla **TAB** para pasar de una celda de la matriz a la siguiente. Suponemos que la matriz A aparece escrita en la fila #3.

- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.

- De forma análoga introduce la matriz B. Suponemos que la matriz B aparece escrita en la fila #4.

- Haz clic en el botón **Editar expresión** y escribe: **#3 + #4** (siendo #3 la fila de la matriz A y #4 la fila de la matriz B).

- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.

- Haz clic en el botón **= Simplificar**. Comprueba que obtienes como resultado la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -6 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- Haz clic en el botón **Editar expresión** y escribe: #3 • #4 (siendo #3 la fila de la matriz A y #4 la fila de la matriz B).

- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.

- Haz clic en el botón **= Simplificar**. Comprueba que obtienes como resultado la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 38 & -4 & -1 \\ 30 & 8 & -56 \\ -9 & 25 & -13 \end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES

- **DOS MATRICES**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) A+B b) A–B c) 3 A + 4 B d) 2 A – 5 B e) $-3\,A^T + 7\,B^T$

- **OTRAS DOS MATRICES**

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula: a) $A^T \cdot B$; b) $3 \cdot A^4 \cdot B$

- **POTENCIA**

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula M^{150}.

- **TRES MATRICES**

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $D=(AB+C)^T$.

b) Calcula la matriz $E=B^T A^T + C^T$.

c) Compara las matrices D y E. ¿Qué observas?. ¿Por qué?.

- **LAVADORAS**

Una fábrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1’2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1’3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y administración empleadas para cada uno de los modelos.

- **IDIOMAS**

En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos normales y grupos reducidos.

La matriz $A=\begin{pmatrix}130 & 160\\ 120 & 80\\ 210 & 130\\ 100 & 60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas por grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente.

Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75\\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25\end{pmatrix}$ reflejan el porcentaje de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtén la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, halla la cantidad a cobrar en cada uno de los idiomas.

- **GASTOS**

Tres escritores presentan a un editor, al acabar una enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta.

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 30 euros y el viaje a 50 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30%, el 20% y el 10% de lo que le correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?.

3. Inversa de una matriz

a) Determinante de una matriz

Para obtener el determinante de la matriz A, hacemos clic en el botón **Editar expresión**, tecleamos **det(A)** y hacemos clic en **Simplificar**.

Ejemplo.- Calcula el determinante de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

Hacemos clic en el botón **Editar matriz** e introducimos las dimensiones (2 columnas y 2 filas). En la siguiente ventana, editamos la matriz A. Con la expresión de la matriz seleccionada, hacemos clic en **Editar expresión**, tecleamos **det(**, pulsamos **F3**, cerramos paréntesis y hacemos clic en **Simplificar**. Obtenemos como resultado **43**.

b) Matriz inversa

Una matriz cuadrada A con determinante distinto de cero, admite matriz inversa que podemos obtener editando la expresión **A^(–1)**. Al hacer clic en **Simplificar**, aparece en pantalla la inversa de la matriz A.

Ejemplo.- Halla la matriz inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

Seleccionamos la matriz en la lista de expresiones y hacemos clic en el botón **Editar expresión**. Pulsamos **F3** para capturar la matriz en la caja de texto. A continuación tecleamos **^(–1)** y hacemos clic en **Simplificar**. El resultado es la matriz

$$\begin{pmatrix} 7/43 & 3/43 \\ -5/43 & 4/43 \end{pmatrix}$$

c) Funciones especiales de Derive

Derive tiene algunas funciones especiales para trabajar con matrices. Todas ellas se introducen mediante el comando Editar Expresión. Aquí tienes las más importantes:

- **ELEMENT (A, i, j):** Da el elemento de la fila i y la columna j de la matriz A.
- **ELEMENT (A, i):** Da la fila i de la matriz A.
- **TRACE (A):** Da la traza de la matriz A.
- **IDENTITY_MATRIX(n):** introduce la matriz identidad de orden n.
- **ROW_REDUCE(A):** da la forma escalonada reducida de la matriz A.
- **DELETE_ELEMENT(A, k):** suprime de la matriz A la fila k–ésima.
- **APPEND(A, vector):** añade a la matriz A las filas contenidas en vector. Las filas se añaden por abajo.

d) Método de Gauss–Jordan

Dada una matriz cuadrada A de orden n, llamamos $(A \mid I_n)$ a la matriz que resulta al añadir a A la matriz unidad de orden n. Si la matriz cuadrada A tiene determinante no nulo, para calcular su inversa hay que transformar la matriz $(A \mid I_n)$, mediante transformaciones elementales por filas, en la matriz $(I_n \mid B)$. La matriz B será precisamente la inversa de la matriz A.

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{elementales por filas}]{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right) = (I_n \mid B)$$

Esta última expresión se llama forma escalonada reducida de la matriz A. Podemos utilizar Derive para aplicar el método de Gauss–Jordan, concretamente con el comando **ROW_REDUCE**. La salida de este comando depende de la entrada. Así:

- **ROW_REDUCE(A)** da como resultado la matriz unidad del mismo orden que A, si A es cuadrada e invertible.
- **ROW_REDUCE(A, IDENTITY_MATRIX(n))** da como resultado la matriz $\left(I_n \mid A^{-1}\right)$, siendo n el orden de la matriz A, siempre que A sea invertible.

Ejemplo.- Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ utilizando el comando row_reduce.

Con la matriz seleccionada en la lista de expresiones, hacemos clic en el botón **Editar expresión** y tecleamos **ROW_REDUCE(**, pulsamos **F3** para capturar la matriz, tecleamos **IDENTITY_MATRIX(2)**, y cerramos paréntesis. Al hacer clic en **Simplificar**, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/43 & 3/43 \\ 0 & 1 & -5/43 & 4/43 \end{pmatrix}$$

También puedes introducir manualmente la matriz unidad del mismo orden que la matriz A en el comando **ROW_REDUCE**. Así, al editar la expresión

ROW_REDUCE([[4, –3], [5, 7]], [[1, 0], [0, 1]])

obtenemos el mismo resultado y, por tanto, la matriz inversa de A.

4. Rango de una matriz

El rango de una matriz es el número de vectores fila (vectores columna) linealmente independientes que contiene dicha matriz. Para determinar el rango de una matriz, averiguaremos cuántas filas linealmente independientes contiene. Esto lo podemos hacer en Derive utilizando la función ROW_REDUCE, que da la forma escalonada reducida de la matriz (es decir triangula la matriz por el método de los ceros) y permite deducir cuántas filas linealmente independientes contiene la matriz. Veamos algún ejemplo.

Ejemplo.– Calcula el rango de la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

- Haz clic en el botón **Editar Matriz** y en la ventana siguiente introduce **3** filas y **3** columnas.

- En la siguiente ventana introduce los elementos de la matriz, pulsando la tecla **TAB** para pasar de cada elemento al siguiente. Haz clic en el botón **Sí**.

- Con la matriz seleccionada, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe **ROW_REDUCE**. Pulsa la tecla **F4** para copiar la selección.

- Si es preciso, cierra paréntesis y haz clic en el botón **Sí**. De esta forma obtienes en pantalla la expresión: $\text{ROW\_REDUCE}\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}\right)$.

- Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que obtienes como resultado la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por el método de Gauss–Jordan, como la última fila esta formada por ceros, solamente las dos primeras filas son linealmente independientes, lo que también ocurre con la matriz de partida A. Por lo tanto, el rango de A es: r(A)=2.

ACTIVIDADES

- **DETERMINANTES**

Calcula los determinantes siguientes: a) $|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ b) $|\,B\,| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 6 & -9 \\ 8 & 7 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & -9 & 4 \end{vmatrix}$

- **ECUACIÓN**

Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

- **INVERSAS**

Halla la inversa de las siguientes matrices: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & a+10 \end{pmatrix}$

- **DOS SISTEMAS**

Expresa los siguientes sistemas como producto de matrices AX=B, siendo: X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ó X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) $\left.\begin{matrix} 6x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} 3x - z = 2 \\ 4x - y + 2z = 7 \\ 7x + 2y - z = -3 \end{matrix}\right\}$

Calcula X despejando en la ecuación AX=B.

- **GAUSS–JORDAN**

Dadas las matrices: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Halla la forma escalonada reducida por filas de las matrices M y N usando la función ROW_REDUCE.

b) Escribe las matrices inversas de M y N.

- **DOS MATRICES**

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula det(A) y det(B).

b) Utiliza la función ROW_REDUCE para calcular su inversa en caso de que exista.

- **BUSCA MATRICES**

Encuentra matrices B tales que A=BC en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- **RANGOS**

Calcula el rango de las siguientes matrices: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

- **MÁS RANGOS**

Utiliza el programa Derive para hallar los rangos de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

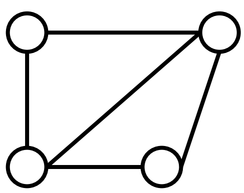
5. Aplicaciones de las matrices

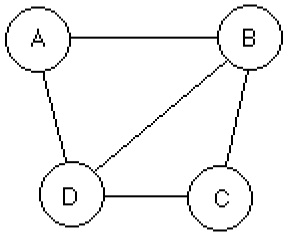
A continuación vamos a estudiar algunas de las numerosas aplicaciones de las matrices y analizaremos las posibilidades de Derive para abordar problemas de las ciencias básicas y sociales que sería impensable tratar en clase sin ayuda de una tecnología apropiada.

A) Grafos y potencias de matrices

Una interpretación curiosa de la potenciación de matrices es la relacionada con los distintos tipos de recorridos que pueden hacerse sobre un grafo.

Ejemplo.- El siguiente grafo muestra un entramado de plazas y calles. Escribe la matriz A correspondiente de manera que se pueda acceder y salir de todas las plazas, suponiendo que todas las calles son de doble sentido. Calcula la matriz A^2 e interpreta su significado. ¿Qué interpretación darías a la matriz A^3?.





La matriz de este grafo es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A.$$

- Haz clic en el botón **Editar Matriz** y en la siguiente ventana escribe **4** filas y **4** columnas. Haz clic en el botón **Sí**.
- En la siguiente ventana, escribe los elementos de la matriz. Haz clic en el botón **Sí**.
- Con la matriz seleccionada, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe: A**:**=. Pulsa la tecla **F4** para copiar la selección y haz clic en el botón **Sí**.
- Haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe $A\hat{}2$. Pulsa el botón **Sí**. Haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que obtienes como resultado la matriz:

$$A^2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \end{array}$$

Esta matriz indica el número de caminos de dos tramos que permiten ir de una plaza a otra. Por ejemplo, para ir de la plaza B a si misma, hay tres caminos posibles de dos tramos: BAB, BDB y BCB, como puede verse en el grafo.

La matriz A^3 indica el número de caminos posibles de tres tramos que permiten ir de una plaza a otra. Para obtenerla haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe $A\hat{}3$ y pulsa el botón **Simplificar**. De la misma forma podemos hallar e interpretar A^4, haciendo clic en **Editar expresión**, escribiendo en la caja de texto $A\hat{}4$ y pulsando el botón **Simplificar**.

B) Criptografía

Una técnica clásica del espionaje secreto consiste en crear claves para cifrar y descifrar mensajes utilizando matrices y operaciones con matrices.

Ejemplo.- En una clave criptográfica se proponen las siguientes sustituciones de letras por números:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
23	10	24	11	25	12	26	13	27	14	1	15	2	16	3	17	4	18	5	19	6	20	7	21	8	22	9

Cualquier mensaje se divide en grupos de dos letras. A cada grupo de dos letras le corresponde una matriz columna B formada por los números correspondientes. A continuación, se efectúa el producto A×B, siendo A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ **la matriz de desciframiento.**

Averigua como se transmitiría con esta clave el mensaje: "TE QUIERO".

Dividimos el mensaje en grupos de dos letras: TE QU IE RO que, de acuerdo con la clave se traducen en las matrices: $\begin{pmatrix}6\\25\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}18\\20\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}27\\25\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}5\\17\end{pmatrix}$.

Editamos con Derive las matrices: [A]= $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}$, [B]= $\begin{pmatrix}6\\25\end{pmatrix}$, [C]= $\begin{pmatrix}18\\20\end{pmatrix}$, [D]= $\begin{pmatrix}27\\25\end{pmatrix}$, [E]= $\begin{pmatrix}5\\17\end{pmatrix}$. Multiplicamos la matriz de desciframiento por cada una de ellas, efectuando los siguientes productos: A*B, A*C, A*D, A*E. Los resultados son:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}56\\193\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\194\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}27\\25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}77\\256\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39\\134\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el mensaje que se transmitirá será: 56 – 193 – 58 – 194 – 77 – 256 – 39 – 134.

C) Clave criptográfica

Se trata de utilizar el cálculo de matrices inversas para descifrar mensajes secretos. Este procedimiento es muy útil y prácticamente imposible de descubrir por alguien que no conozca la matriz de desciframiento.

Ejemplo.- En una clave criptográfica se proponen las siguientes sustituciones de letras por números:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
23	**10**	**24**	**11**	**25**	**12**	**26**	**13**	**27**	**14**	**1**	**15**	**2**	**16**	**3**	**17**	**4**	**18**	**5**	**19**	**6**	**20**	**7**	**21**	**8**	**22**	**9**

Cualquier mensaje se divide en grupos de dos letras. A cada grupo de dos letras le corresponde una matriz columna B formada por los números correspondientes. A continuación, se efectúa el producto A×B, siendo A=$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\\mathbf{3} & \mathbf{7}\end{pmatrix}$ la matriz de desciframiento. Hemos recibido el siguiente mensaje: 56 – 193 – 39 – 128 – 61 – 200. Descifra este mensaje utilizando la clave secreta.

Para descifrar el mensaje se multiplica la matriz inversa de A por las matrices $\begin{pmatrix}56\\193\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}39\\128\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}61\\200\end{pmatrix}$. Hallamos la inversa de la matriz A=$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}$. Editamos la matriz A con Derive y a continuación hacemos clic en Editar expresión y en la caja de texto escribimos $A\wedge(-1)$. Pulsamos el botón Sí. La matriz inversa de A es: $A^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$. A continuación editamos cada una de las tres matrices anteriores. Posteriormente multiplicamos la matriz A por cada una de las matrices anteriores, obteniendo:

$$\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}56\\193\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\25\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}39\\128\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\11\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}61\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\17\end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la clave secreta, tenemos: $\frac{6}{\text{T}}\ \frac{25}{\text{E}}\ \frac{17}{\text{O}}\ \frac{11}{\text{D}}\ \frac{27}{\text{I}}\ \frac{17}{\text{O}}$. El mensaje recibido es, pues, “TE ODIO”.

D) Procesos de fabricación

Las matrices son útiles para expresar un gran volumen de información. Una aplicación del producto de matrices consiste en organizar de manera estructurada un conjunto de datos. Si las matrices se multiplicaran de otra manera, tendrían sin duda menos aplicaciones. Veamos un ejemplo.

Una empresa juguetera fabrica tres tipos de animales de peluche: osos panda (Pa), canguros (Ca) y conejos (Co). Para producir un muñeco hace falta cortar el material (Ct), coser (Cs) y realizar el acabado (Ac). La matriz A muestra el número de horas necesario en cada tipo de trabajo para cada muñeco.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Pa} & \text{Ca} & \text{Co} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0'5 & 0'8 & 0'4 \\ 0'8 & 1 & 0'5 \\ 0'6 & 0'4 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Ct} \\ \text{Cs} \\ \text{Ac} \end{array} \end{array}$$

La fábrica ha recibido los pedidos para los meses de octubre y noviembre. En la matriz B se muestra la cantidad de muñecos de cada tipo que fabrican cada mes:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Oct} & \text{Nov} \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 1000 & 1100 \\ 600 & 850 \\ 800 & 725 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Pa} \\ \text{Ca} \\ \text{Ac} \end{array} \end{array}$$

Para calcular el número de horas que se dedican al cortado durante el mes de octubre, hemos de multiplicar 0’5×1000+0’8×600+0’4×800, que es el producto de la primera fila de A por la primera columna de B. De la misma forma podemos calcular el número de horas de acabado en noviembre si multiplicamos la tercera fila de A por la segunda columna de B. Por tanto, el producto A*B dará el número de horas de trabajo en cada sección durante los dos meses.

Si editamos las matrices A y B con Derive y hacemos el producto A*B, obtenemos:

$$A * B = \begin{bmatrix} 1300 & 1520 \\ 1800 & 2092'5 \\ 1240 & 1362'5 \end{bmatrix}$$

La empresa tiene tres fábricas: una en norte (N), otra en el centro (C) y otra en el sur (S) del país. En la matriz C se dan los salarios, en euros, que cobran por hora los trabajadores de cada tarea en cada fábrica del país.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Ct} & \text{Cs} & \text{Ac} \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 7'5 & 9 & 8'4 \\ 7 & 8 & 7'6 \\ 8'4 & 10'5 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{N} \\ \text{C} \\ \text{S} \end{array} \end{array}$$

Para saber cuánto cuesta producir el canguro en la fábrica sur, hemos de hacer el producto: 8'40×0’8+10'50×1+10'00×0’4=21'22. La matriz C*A indica el coste de cada muñeco en cada fábrica. Editamos la matriz C con Derive y a continuación guardamos el producto C*A en la matriz D haciendo clic en el botón Editar expresión y escribiendo en la caja de texto: D:=C*A y pulsando el botón Sí. El resultado es la matriz:

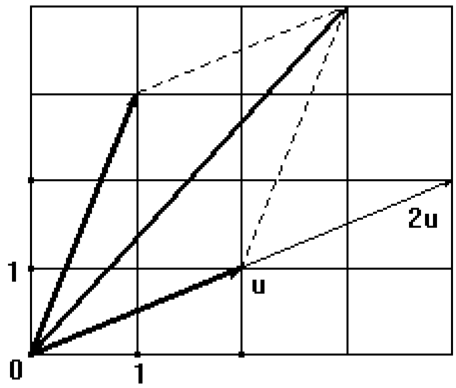
$$C * A = \begin{bmatrix} 15'99 & 18'36 & 11'7 \\ 14'46 & 16'64 & 10'6 \\ 18'6 & 21'22 & 13'61 \end{bmatrix}$$

Para estudiar cuánto costará la fabricación del pedido de octubre en la fábrica Sur, hay que hacer el producto: 18.60×1000+21.22×600+13.61×800=42220 euros. De la misma forma, el producto D*B dará el coste de la fabricación del pedido de cada mes en cada fábrica.

$$D * B = \begin{bmatrix} 36366 & 41677'5 \\ 32924 & 37735 \\ 42220 & 48364'2 \end{bmatrix}$$

E) Movimientos en el plano

Dados dos vectores u = (2, 1) y v = (1, 3), podemos realizar la suma u + v = (2 + 1, 1 + 3). Geométricamente se hace con la regla del paralelogramo. De la misma forma, si k es un número y u es un vector, ku es otro vector de la misma dirección cuyo módulo es k veces mayor.

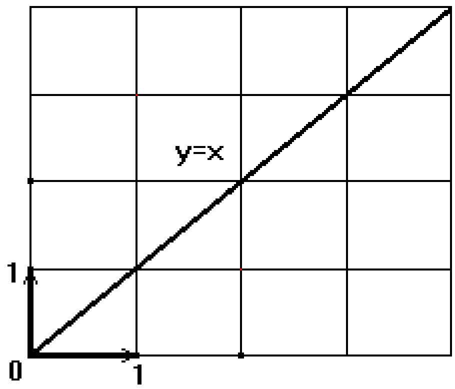


Una transformación se puede ver como el resultado de multiplicar una matriz por el vector columna que indica sus coordenadas. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ representa una transformación geométrica en la que el vector u = (1, 0) se transforma en x = (2, 1) y el vector v= (0, 1) en y = (5, 3), ya que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de un movimiento, se aplica dicha matriz a dos vectores de distintas direcciones, por ejemplo u=(1, 0) y v=(0, 1) y se obtienen sus imágenes a través del producto de matrices. Veamos un par de ejemplos:

- **Matriz de la simetría de eje y = x**

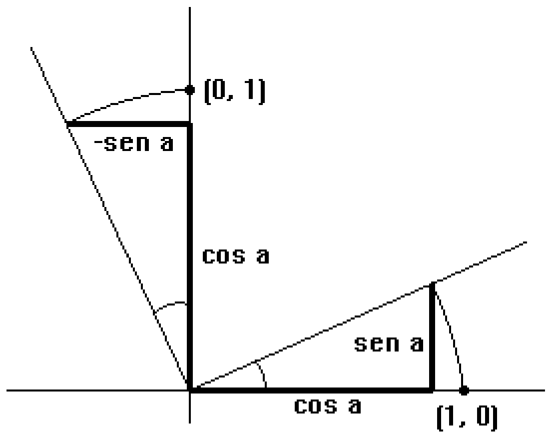


En una simetría de eje y = x, el vector u = (1, 0) se transforma en el v = (0, 1) y viceversa. Por tanto, su matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es tal que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, debe ser: $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es decir: a = 0, c = 1, b = 1 y d = 0. Luego la matriz de una simetría de eje y = x es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Matriz de un giro de centro O(0, 0) y ángulo θ**

En un giro de centro O(0, 0) y ángulo θ, el vector u=(1, 0) se transforma en (cos θ, sen θ) y el vector v=(0, 1) se convierte en (–sen θ, cos θ), tal como muestra la figura. Por tanto, su matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es tal que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. Por tanto, debe cumplirse $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. Es decir: a= cos θ, b= –sen θ, c= sen θ y d=cos θ.

Luego la matriz de un giro de centro O(0, 0) y ángulo θ es $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}$



En la siguiente tabla se muestran las matrices de algunas transformaciones geométricas:

MOVIMIENTO	TRANSFORMA	EN	MATRIZ
Simetría respecto del eje OX (y = 0)	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Simetría respecto del eje y = –x	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Traslación de vector (a, b)	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$	
Semejanza de razón r	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \end{pmatrix}$	
Giro de centro O(0, 0) y ángulo 90º	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.– Halla el transformado del vector (3, 5) mediante una simetría de eje y = x.

Para ello hay que hacer el producto de matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Editamos las matrices A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ con Derive y, a continuación, hacemos el producto A*B, haciendo clic en **Editar expresión**, escribiendo en la caja de texto A*B y pulsando el botón **Sí**. Al hacer clic en el botón **= Simplificar** obtenemos: A*B= $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Por tanto, el vector (3, 5) se convierte en el vector (5, 3).

Ejemplo 2.– Halla el transformado del vector (2, 6) mediante una rotación de centro O(0,0) y ángulo de giro 90º

Para ello hay que hacer el producto de matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Editamos las matrices A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ con Derive y, a continuación, hacemos el producto A*B, haciendo clic en el botón **Editar expresión**, escribiendo en la caja de texto A*B y pulsando el botón **Sí**. Al hacer clic en el botón **= Simplificar**, obtenemos: A*B=$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Por tanto, el vector (2, 6) se transforma en el vector (6, –2).

F) Método de la matriz inversa

Dado el sistema $\left.\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = 5 \end{matrix}\right\}$ podemos considerar las matrices

A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ MATRIZ DE COEFICIENTES

B=$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ MATRIZ DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ MATRIZ DE INCÓGNITAS

con lo que el sistema puede escribirse en forma matricial así: $A \times X = B$ o bien
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ como puedes comprobar efectuando el producto de matrices A × X e igualando las dos matrices columna de ambos miembros.

Observa además que la matriz A es cuadrada y regular y, por tanto, tiene inversa, A^{-1}. Entonces, multiplicando por A^{-1} ambos miembros tendríamos:

$A^{-1} \times A \times X = A^{-1}$ x B y teniendo en cuenta que $A^{-1} \times A = I$, obtenemos:

$I \times X = A^{-1} \times B$ y como $I \times X = X$, resulta finalmente

$$\mathbf{X = A^{-1} \times B}$$

Por tanto, el problema de resolver un sistema de ecuaciones es equivalente al de hallar la matriz inversa de la matriz de coeficientes. Una vez obtenida ésta, basta efectuar un producto de matrices para tener resuelto el problema. Todo ello suponiendo, claro está, que la matriz de coeficientes es **cuadrada** y **regular** (es decir, tiene inversa). Evidentemente, el producto $A^{-1} \times B$ podemos hacerlo con Derive.

Ejemplo.– Usando el método de la matriz inversa, resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x + 2y + 6z = 24}\\ \mathbf{2x + 4y + 3z = 23}\\ \mathbf{5x + 3y + 4z = 33}\end{array}\right\}$

La expresión matricial del sistema es: A*X=B, siendo A=$\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}24\\ 23\\ 33\end{pmatrix}$. La solución del sistema se obtiene así: X=A^{-1}*B. Editamos con Derive las dos matrices A y B y a continuación hacemos el producto $A^{-1} \times B$, haciendo clic en el botón Editar expresión, escribiendo en la caja de texto $A^{-1} \times B$ y haciendo clic en el botón Simplificar. Observa que obtienes la matriz: $X = \begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$. Por tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es: x=4, y=3, z=1.

ACTIVIDADES

- **EQUILIBRIO**

Las condiciones de equilibrio para dos mercados relacionados (carne de cerdo y de vacuno) las dan el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r}18x - y = 87\\ -2x + 26y = 98\end{array}\right\}$. Halla, por el método de la matriz inversa, los precios de equilibrio x e y para cada mercado.

- **RENTABILIDAD**

Un potente inversionista ordena comprar acciones de tres tipos por un importe total de 35 millones de euros. Pasado un año las acciones del primer tipo reparten un dividendo del 6 por 100, las del segundo tipo del 8 por 100, y las del tercer tipo del 10 por 100. La cuantía total de la rentabilidad de las acciones es de 3 millones de euros. ¿Cuánto invirtió en cada uno de los tipos de acciones, sabiendo que el total invertido en acciones del tercer tipo es igual a la suma de los otros dos más 10 millones?. Si prescindimos de este último dato, ¿cuál sería la respuesta?.

- **FABRICACIÓN**

Una empresa fabrica tres productos, x, y z, utilizando para ello tres máquinas, A, B, C. Cada unidad de x necesita 1 hora de tiempo de la máquina A, 2 horas de B y 5 horas de C. Cada unidad de y requiere, respectivamente, 3, 1 y 2 horas. Por último, cada unidad de z precisa 1, 0'5 y 1 hora. En una semana A está funcionando durante 300 horas, B, 195 horas y C, 440 horas. Con estos datos, y teniendo en cuenta que se aprovecha íntegramente el tiempo de funcionamiento de las máquinas, determina cuántas unidades de cada producto x, y, z, se fabricarán semanalmente.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DERIVE

Introducción

También Derive permite resolver sistemas de ecuaciones lineales. Un sistema puede ser compatible determinado, si tiene solución única, compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones, e incompatible, si no tiene solución. Veamos cómo utilizar el programa por medio de algunos ejemplos.

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo 1.- Discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$\textbf{a)}\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{2x+3y+4z=5} \\ \mathbf{3x-3y+5z=3} \\ \mathbf{7x-9y+z=8} \end{array}\right\} \qquad \textbf{b)}\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{3x+4y}-z=\mathbf{0} \\ \mathbf{2x+y+z=0} \\ \mathbf{7x+6y+z=0} \end{array}\right\}$$

a) Selecciona el comando **Resolver / Sistema**. En el siguiente cuadro de diálogo indica el número de ecuaciones del sistema y haz clic en **Sí**. En la siguiente ventana debes introducir cada una de las tres ecuaciones del sistema. A continuación, haz clic en la caja de texto **Variables en ecuación** y comprueba que aparecen resaltadas las tres incógnitas x, y, z. Finalmente, haz clic en el botón **Simplificar** y comprueba que las soluciones son

$$\left[x=\frac{103}{52}, y=\frac{49}{78}, z=-\frac{11}{52}\right]$$

Con esta expresión seleccionada, hacemos clic en el botón ≈ **Simplificar**, obteniendo la expresión decimal de la única solución del sistema:

[x = 1.98076, y = 0.628205, z = –0.211538]

Por tanto, el sistema es **compatible determinado**.

b) Seleccionamos el comando **Resolver / Sistema**. Al igual que antes, indicamos a Derive que el sistema tiene tres ecuaciones y hacemos clic en **Sí**. En la siguiente ventana, introducimos las tres ecuaciones y hacemos clic en la caja **Variables en ecuación**. Tras comprobar que las incógnitas son x, y, z, hacemos clic en **Simplificar** y obtenemos un resultado sorprendente:

[x = @1, y = –@1, z = –@1]

Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, se trata de un sistema **compatible indeterminado**.

En efecto, si editamos la matriz de coeficientes, $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, y calculamos su determinante, obtendremos det(A)=0, lo que indica que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 2.– Clasifica y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l}\mathbf{x-3y+z=-2}\\ \mathbf{2x+y-z=6}\\ \mathbf{x+2y+2z=2}\end{array}\right\}$

- Selecciona el comando **Resolver / Sistemas de ecuaciones…**
- En la ventana que aparece, escribe **3** ecuaciones y pulsa el botón **Sí**.
- En la nueva ventana escribe las ecuaciones, una en cada fila, y haz clic con el ratón dentro del cuadro **Variables**: automáticamente aparecen las tres variables x, y, z.
- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.
- Haz clic en el botón **= Simplificar**. Observa que el resultado es: [x = 2, y = 1, z = –1]. El sistema es compatible determinado.

2. Sistemas con un parámetro

También podemos estudiar sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro y resolverlos, en caso de que esto sea posible.

Ejemplo.– Resuelve el siguiente sistema en función del parámetro k: $\left.\begin{array}{l}\mathbf{kx+y+z=1}\\ \mathbf{x+ky+z=k}\\ \mathbf{x+y+kz=k^2}\end{array}\right\}$

- Selecciona el comando **Resolver / Sistemas de ecuaciones…**
- En la ventana que aparece escribe **3** ecuaciones y pulsa el botón **Sí**.
- En la nueva ventana escribe las ecuaciones, una en cada fila, y haz clic con el ratón dentro del cuadro **Variables**. Automáticamente aparecen las tres variables x, y, z y el parámetro k.
- Pulsa el botón **Sí** para pasar al Editor.
- Haz clic en el botón **= Simplificar**. Comprueba que obtienes como resultado un sistema compatible determinado con solución:

$$\left[x=-\frac{k+1}{k+2},\ y=\frac{1}{k+2},\ z=\frac{1}{k+2}+k\right]$$

3. Posiciones relativas de planos

También podemos resolver problemas de geometría como el estudio de las posiciones relativas de dos o tres planos. Para ello es útil aplicar el teorema de Rouché. Si C es la matriz de los coeficientes del sistema formado por las ecuaciones de los planos y A es la matriz ampliada con los términos independientes, entonces:

1) r(C)=r(A)=nº de incógnitas ⇔ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO ⇔ Los planos se cortan en un punto.

2) r(C)=r(A)<nº de incógnitas ⇔ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO ⇔ Los planos son coincidentes o se cortan en una recta.

3) r(C)<r(A) ⇔ SISTEMA INCOMPATIBLE ⇔ No hay ningún punto del espacio que esté situado a la vez en todos los planos.

Ejemplo.– Calcula la posición relativa de los planos: $\left.\begin{array}{l} \pi = \mathbf{3x - 4y + 5z = 2} \\ \pi' = \mathbf{-x + 7y - 9z = 5} \\ \pi'' = \mathbf{2x + 3y - 4z = 7} \end{array}\right\}$

a) Calcula el rango de la matriz de los coeficientes C y comprueba que r(C)=2.

- Haz clic en el botón **Editar Matriz** y en la ventana siguiente introduce **3** filas y **3** columnas.

- En la siguiente ventana introduce los elementos de la matriz, pulsando la tecla **TAB** para pasar de cada elemento al siguiente. Haz clic en el botón **Sí**.

- Con la matriz seleccionada, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe **ROW_REDUCE**. Pulsa la tecla **F4** para copiar la selección.

- Haz clic en el botón **Sí**. De esta forma obtienes en pantalla la expresión: $\text{ROW\_REDUCE}\left(\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & 7 & -9 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}\right)$.

- Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que obtienes como resultado la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/17 \\ 0 & 1 & -22/17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por el método de Gauss–Jordan, como la última fila esta formada por ceros, solamente las dos primeras filas son linealmente independientes, lo que también ocurre con la matriz de partida C. Por lo tanto, el rango de C es: r(C)=2.

b) Calcula el rango de la matriz ampliada con los términos independientes A y comprueba que r(A)=2.

- Haz clic en el botón **Editar Matriz** y en la ventana siguiente introduce **3** filas y **4** columnas.

- En la siguiente ventana introduce los elementos de la matriz, pulsando la tecla **TAB** para pasar de cada elemento al siguiente. Haz clic en el botón **Sí**.

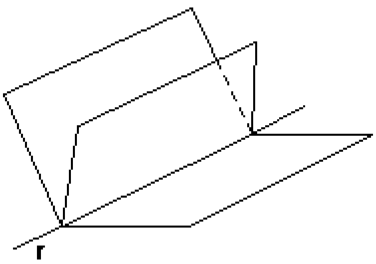
- Con la matriz seleccionada, haz clic en el botón **Editar expresión** y en la caja de texto escribe **ROW_REDUCE**. Pulsa la tecla **F4** para copiar la selección.

- Haz clic en el botón **Sí**. De esta forma obtienes en pantalla la expresión: $\text{ROW\_REDUCE}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -9 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$.

- Con esta expresión seleccionada, haz clic en el botón **= Simplificar** y observa que obtienes como resultado: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/17 & 2 \\ 0 & 1 & -22/17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por el método de Gauss–Jordan, como la última fila esta formada por ceros, solamente las dos primeras filas son linealmente independientes, lo que también ocurre con la matriz de partida A. Por lo tanto, el rango de A es: r(A)=2.

Como r(C)=r(A)=2<3=nº de incógnitas, aplicando el Teorema de Rouché, el sistema es compatible indeterminado.

Observa que, como no hay dos planos coincidentes, los tres planos forman un haz, es decir, los tres planos se cortan en una recta.



ACTIVIDADES

- **RESUELVE SISTEMAS**

a) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 3 \\ 5x + y &= 63 \end{aligned}\right\}$ usando el programa Derive.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$ con el programa Derive.

- **SISTEMAS LINEALES**

Resuelve y clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ x + y &= -1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 4z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 3y - 4z &= 2 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 7x + 6y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

- **PARÁMETROS**

a) Discute y resuelve en función del parámetro el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{l} x + a^2\ y = a \\ a\,x + y = a^2 \\ a^2\ x - a\,y = 1 \end{array}\right\}$

c) Discute el siguiente sistema y resuélvelo cuando sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + m\,z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = m \end{array}\right\}$$

- **POSICIONES RELATIVAS**

Halla la posición relativa de los siguientes planos. En el caso de que tengan puntos comunes, calcúlalos:

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} \pi = 3x - 2y + 5z = 1 \\ \pi' = 2x - 4y - 3z = -1 \\ \pi'' = 5x - 6y - 2z = 4 \end{array}\right\} \qquad \text{b)}\ \left.\begin{array}{l} \pi = 2x - y + z = 3 \\ \pi' = x + 5y - 3z = 2 \\ \pi'' = x - 6y + 4z = 1 \end{array}\right\}$$

- **CHOCOLATES**

Una fábrica de chocolates emplea, para una determinada marca, leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de los ingredientes por kilo son: leche, 0'8 euros; cacao, 4 euros; y almendra, 13 euros. En un día se fabrican 9000 kg de chocolate de dicha marca con un coste total de 25800 euros. ¿Cuántos kilos se utilizan de cada componente?.

- **PINTURAS**

Cierta marca de pintura es elaborada con tres ingredientes, A, B y C, comercializándose en tres tonos diferentes. El primero se prepara con 2 unidades de A, 2 de B y 1 de C; el segundo, con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C; y el tercero con una unidad de cada ingrediente. El bote del primer tono se vende a 38 euros, el segundo a 31 euros y el tercero a 23 euros. Sabiendo que el margen comercial (o ganancia) es de 5 euros por bote, ¿qué precio por unidad le cuesta a dicha marca de pintura cada uno de los tres ingredientes?.

- **TRANSPORTE DE VIAJEROS**

Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación de sus billetes asciende a 3520 euros. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 15 euros; cuántos han pagado el 20% del billete, y cuántos el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20% es el doble del número de viajeros que paga el billete entero.

- **INVERSIÓN**

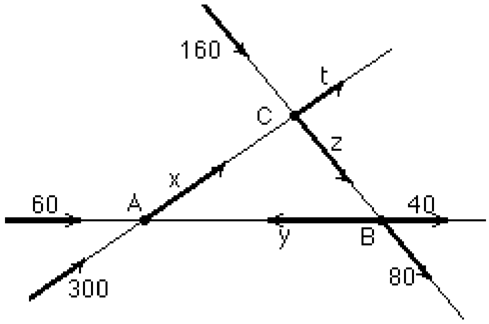
Invirtiendo 10000 euros en acciones de tipo A y 20000 euros en acciones de tipo B, obtendríamos unos intereses totales (anuales) de 2800 euros, y si invertimos 20000 euros en A y 10000 euros en B, obtenemos 2600 euros. ¿Cuáles serían los intereses si se invirtieran 30000 euros en A y 50000 euros en B?.

- **PETRÓLEO**

Un estado compra 540000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 16 millones de dólares. Si del primer suministrador recibe el 30% del total del petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?.

- **CRUCE DE CARRETERAS**

El cruce de carreteras, esquematizado en el dibujo, indica el número de coches / hora que transita por cada tramo de dirección única y en los que el aparcamiento está prohibido.



Si se suspende el tráfico en el tramo AB por obras, ¿qué número de vehículos han de discurrir por AC, BC y CD?. ¿Podría cerrarse el tráfico por AC?. ¿Y por CB?.

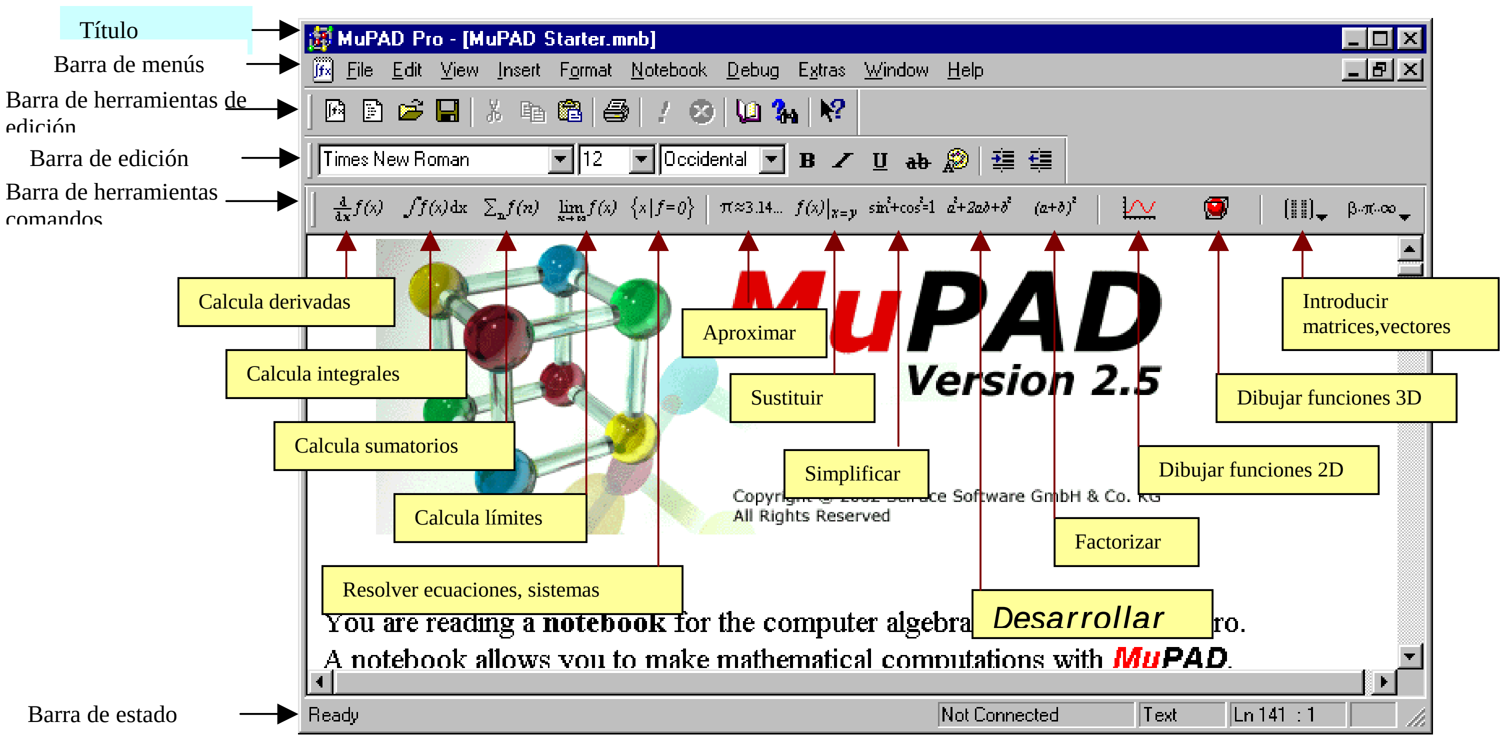
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA CON MUPAD

Introducción

Mupad: (Multi Procesing Algebra Data Tool) es un asistente matemático de cálculo simbólico que permite realizar todo tipo de cálculos (derivadas, integrales, resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones, operaciones con números y con polinomios, descomposición factorial, desarrollos en serie, etc), y representaciones gráficas de funciones. Además incluye las siguientes características:

- los gráficos se integran en el mismo documento (o en una ventana aparte).
- se combina muy bien en los ficheros bajo Windows (Office, Web).
- en una misma entrada del programa se puede combinar texto, órdenes y gráficos.
- dispone un entorno de edición muy cómodo.
- posee un buen sistema de ayudas

Al ejecutar el programa MuPAD aparece la siguiente ventana:



1. Operaciones aritméticas

- **Abre un nuevo fichero MuPAD (NoteBooks)**, para ello elige File/New Notebooks en la barra de menús (con el teclado puedes abrir el fichero pulsando **Ctrol+N**) o bien hacer clic sobre el icono .

1) Racionalizar:	$\dfrac{\sqrt{2}+7}{\sqrt{3}+1}$

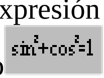
Solución: Introduce las expresiones:

- (7+2^(1/2))/(sqrt(3)+1)

$$\frac{\sqrt{2}+7}{\sqrt{3}+1}$$

- simplify(%,sqrt)

$$\frac{7\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}$$

La expresión **simplify(%?)** se puede escribir directamente, o bien haciendo clic sobre el icono 

, o bien desde la barra de menús *Extras/Simplify/Rational*.

2) Descomponer en factores: 1080.

- factor(1080)

$$5\cdot 2^3\cdot 3^3$$

3) Calcula el MCD y el mcm de 600, 264 y 396.

- gcd(600,264, 396)

$$12$$

- 600=factor(600); 264=factor(264); 396=factor(396); 12=factor(12)

$$600 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$$

$$264 = 2^3\cdot 3\cdot 11$$

$$396 = 11\cdot 2^2\cdot 3^2$$

$$12 = 3\cdot 2^2$$

- lcm(600, 264, 396)

$$19800$$

- factor(19800)

$$11\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$$

4) Calcular $\frac{5}{8}:\frac{7}{10}-4\cdot\frac{13}{6}$

- 5/8/(7/10)–4*13/6

$$-\frac{653}{84}$$

- float(%)

$$-7.773809524$$

4) Racionalizar: $\dfrac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

- 12/(sqrt(7)–sqrt(3))

$$\frac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

- simplify(%,sqrt)

$$3\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{7}$$

5) Calcular 7’03·10–16:4,4·10–7.

- 7.03*10^(–16)/(4.4*10^(–7))

$$0.000000001597727273$$

6) Calcular Log 27.

- `log(2,7)`

$$\log_2(7)$$

- `float(%)`

$$2.807354922$$

7) Expresar en decimal con 50 dígitos los números:

a. 5/12; b. **e** c. π d. $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- DIGITS:=50

$$50$$

- float(5/12)

$$0.41666666666666666666666666666666666666666666666667$$

- float(exp(1))

$$2.7182818284590452353602874713526624977572470937$$

- float(PI)

$$\boxed{3.1415926535897932384626433832795028841971693993751}$$

- float((1+sqrt(5))/2)

$$\boxed{1.6180339887498948482045868343656381177203091798058}$$

8) Simplificar las siguientes expresiones: *a.* $\sqrt{50}-5\sqrt{18}+\sqrt{98}$ *b.* $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$

- 50^(1/2)–5*18^(1/2)+98^(1/2)

$$\boxed{\sqrt{50}-5\cdot\sqrt{18}+\sqrt{98}}$$

- simplify(%)

$$\boxed{-3\cdot\sqrt{2}}$$

- 3^(1/4)*27^(1/4)

$$\boxed{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}}$$

- simplify(%,sqrt)

$$\boxed{3}$$

2. Operaciones algebraicas

1) Resuelve la ecuación 3x+2+3x+1+3x = 117

- assume (x,Type::Real):solve(3^(x+2)+3^(x+1)+3^x=117, x)

$$\boxed{\left\{\frac{\ln(9)}{\ln(3)}\right\}}$$

- float(%)

$$\boxed{\{2.0\}}$$

2) Calcular el cociente y el resto de las siguientes división: $\left(6x^5-12x^4+9x^2-18\right)/\left(2x^3+2x-5\right)$

- p:=6*x^5–12*x^4+9*x^2–14*x+24

$$\boxed{9\cdot x^2-14\cdot x-12\cdot x^4+6\cdot x^5+24}$$

- q:=2*x^3+2*x–5

$$2 \cdot x + 2 \cdot x^3 - 5$$

- p/q

$$\frac{9 \cdot x^2 - 14 \cdot x - 12 \cdot x^4 + 6 \cdot x^5 + 24}{2 \cdot x + 2 \cdot x^3 - 5}$$

- divide(p,q)

$$3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 3,\ 36 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 9$$

- divide(p,q,Quo)

$$3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 3$$

- divide(p,q,Rem)

$$36 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 9$$

3) Descomponer en factores y hallar las raíces del polinomio: $x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

- factor(x^4+2*x^3–13*x^2–14*x+24)

$$(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4) \cdot (x + 2)$$

- solve(%, x)

$$\{-4,\ -2,\ 1,\ 3\}$$

4)

a. Dado el polinomio $P(x) = x^2-2x+3$ hallar su valor numérico en los puntos $x = -1$, $x = 0$, $x = 10$ y $x = -1/3$.

b. Dado el polinomio $Q(y) = y^4-y^2+7$ hallar Q(1), Q(–1), Q(1/2) y Q(–5).

Solución: Introduce las siguientes órdenes:

- P(x):=x^2–2*x+3

$$x^2 - 2 \cdot x + 3$$

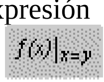
- P(–1)=subs(P(x), x = –1); P(0)=subs(P(x), x = 0); P(10)=subs(P(x), x = 10); P(–1/3)=subs(P(x), x = –1/3)

$$P(-1) = 6$$

$$P(0) = 3$$

$$P(10) = 83$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{34}{9}$$

- ✓ El "**;** " crea un salto de línea en la salida y permite añadir una nueva expresión.
- ✓ Para escribir una expresión en la siguiente línea pulsa **Ctrl+Intro**.
- ✓ La expresión **subs(%?, %?=%?)**, se puede escribir directamente, o bien utilizar el icono .

- Q:=y–>y^4–y^2+7

$$\boxed{y \to y^4 - y^2 + 7}$$

- q(1)=Q(1);q(–1)=Q(–1);q(1/2)=Q(1/2);q(–5)=Q(–5)

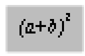
$$q(1) = 7$$
$$q(-1) = 7$$
$$q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{109}{16}$$
$$q(-5) = 607$$

5) Descomponer en factores el polinomio $x^5–7x^3–2x^2+12x+8$.

Solución: Introduce la expresión:

- factor(x^5–7*x^3–2*x^2+12*x+8)

$$\boxed{(x+2)\cdot(x+1)^2\cdot(x-2)^2}$$

La expresión **factor(%?)** se puede escribir directamente, o bien pulsando sobre el icono , o bien desde la barra de menús *Extras/Factor*.

6) Desarrollar: a. $(a–3x)^4$ b. $(y–x)^3+(x–y)^4$.

Solución: Introducir las expresiones:

- expand((a–3*x)^4)

$$\boxed{a^4 + 81\cdot x^4 - 108\cdot a\cdot x^3 - 12\cdot a^3\cdot x + 54\cdot a^2\cdot x^2}$$

- expand((y–x)^3+(x–y)^4)

$$\boxed{x^4 - x^3 + y^3 + y^4 - 3\cdot x\cdot y^2 + 3\cdot x^2\cdot y - 4\cdot x\cdot y^3 - 4\cdot x^3\cdot y + 6\cdot x^2\cdot y^2}$$

Observación: **expand(%?)** se puede escribir directamente, haciendo clic sobre el icono , o bien accediendo desde la barra de menús *Extras/Expand*.

7) Hallar el valor numérico del polinomio $P(x)=x^4-3x^3-2x+8$ en x=-2 y x= $\sqrt[4]{27}$

- p(x):=x^4–3*x^3–2*x+8

$$x^4 - 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x + 8$$

- p(2)=subs(p(x), x = –2); p(27^(1/4))=simplify((subs(p(x),x=27^(1/4))))

$$p(2) = 52$$

$$p(\sqrt[4]{27}) = 35 - 2 \cdot \sqrt[4]{27} - 27 \cdot \sqrt[4]{3}$$

8) Desarrollar la expresión: $\boldsymbol{(x^2 + y)^5}$

- expand((x^2+y)^5)

$$y^5 + x^{10} + 5 \cdot x^8 \cdot y + 5 \cdot x^2 \cdot y^4 + 10 \cdot x^4 \cdot y^3 + 10 \cdot x^6 \cdot y^2$$

9) Hallar los 10 primeros términos de la sucesión $a_n = n/(n^2+1)$

- ```
  for i from 1 to 10 do
      a:=i/(i^2+1);
      print(Unquoted, "El término que ocupa la posición "
          .i. " es " .expr2text(a)."=".expr2text(float(a)));
  end_for
  ```

El término que ocupa la posición 1 es 1/2=0.5

El término que ocupa la posición 2 es 2/5=0.4

El término que ocupa la posición 3 es 3/10=0.3

El término que ocupa la posición 4 es 4/17=0.2352941176

El término que ocupa la posición 5 es 5/26=0.1923076923

El término que ocupa la posición 6 es 6/37=0.1621621622

El término que ocupa la posición 7 es 7/50=0.14

El término que ocupa la posición 8 es 8/65=0.1230769231

El término que ocupa la posición 9 es 9/82=0.1097560976

El término que ocupa la posición 10 es 10/101=0.09900990099

Unquoted se utiliza para que no salgan los paréntesis desde **print**.
  ```

expr2text se utiliza para convertir expresiones a cadenas de caracteres.

El carácter **.** se utiliza para concatenar cadenas de caracteres.

3. Vectores

EXPRESIÓN	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO
matrix([[u_1,u_2,u_3]])	Definir un vector	• u:=matrix([[3,–7,9]]) $\begin{pmatrix}3 & -7 & 9\end{pmatrix}$
norm(u,2)	Módulo de un vector. En el ejemplo se observan tres formas de definir el módulo de un vector.	• norm(u,2); sqrt((3^2+(–7)^2+9^2)); sqrt(linalg::scalarProduct(u,u)) $\sqrt{139}$ $\sqrt{139}$ $\sqrt{139}$
linalg::normalize(u)	Normaliza un vector.	linalg::normalize(u) $\left(\frac{3\cdot\sqrt{139}}{139} \quad -\frac{7\cdot\sqrt{139}}{139} \quad \frac{9\cdot\sqrt{139}}{139}\right)$
linalg::escalarProduct	Calcula el producto escalar de vectores	• linalg::scalarProduct(matrix([[–7,k,3]]), matrix([[2,–5,–1]])) $-5\cdot k-17$
linalg::crossProduct	Calcula el producto vectorial.	• w:=linalg::crossProduct(matrix([[5,–7,1]]), matrix([[0,2,7]])) $\begin{pmatrix}-51 & -35 & 10\end{pmatrix}$

1) Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{v}(3,-7,9)$ *y* $\vec{u}(-8,5,-3)$.

Recordar: El ángulo formado por dos vectores viene dada por la fórmula

$$\alpha = \arccos\left(\frac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|}\right) \wedge 0 \le \alpha \le \pi$$

- v:=matrix([[3,–7,9]]);u:=matrix([[–8,5,–3]])

$$\begin{pmatrix}3 & -7 & 9\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-8 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

- angulo:=arccos(linalg::scalarProduct(v,u)/(norm(v,2)*norm(u,2)))

$$\pi - \arccos\left(\frac{43\cdot\sqrt{98}\cdot\sqrt{139}}{6811}\right)$$

- angulo_radianes=float(angulo)

$$\boxed{angulo\_radianes = 2.399192704}$$

- angulo_grados=float(angulo*180/PI)

$$\boxed{angulo\_grados = 137.4636162}$$

2)	Hallar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{v}(4,6,-1)$ y $\vec{u}(2,3,-2)$

Solución: Sea el vector buscado **w** = (x,y,z). Por ser unitario |**w**| = 1. Por ser ortogonal a **v** y **w** se satisface que **w·v = 0** y **w·u = 0**.

- assume([x,y,z],Type::Real)

$$\boxed{Type::Real}$$

- export(linalg,scalarProduct)

Info: 'linalg::scalarProduct' already is exported.

- v:=matrix([[4,6,-1]]);u:=matrix([[2,3,-2]]);w:=matrix([[x,y,z]])

$$\begin{pmatrix}4 & 6 & -1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$$

- solve({norm(w,2)=1,scalarProduct(v,w)=0,scalarProduct(u,w)=0}, {x,y,z})

$$\left\{\left[x = -\frac{3\cdot\sqrt{13}}{13},\ y = \frac{2\cdot\sqrt{13}}{13},\ z = 0\right],\ \left[x = \frac{3\cdot\sqrt{13}}{13},\ y = -\frac{2\cdot\sqrt{13}}{13},\ z = 0\right]\right\}$$

4. Matrices

1) A cierta academia de idiomas acuden alumnos de los diversos niveles de ESO y Bachillerato a recibir clases de Inglés y Alemán, según la distribución que muestra la matriz:

$$A = \begin{array}{c} \\ 3^{o}\ ESO \\ 4^{o}\ ESO \\ 1^{o}\ BAC \\ 2^{o}\ BAC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{INGLES} & \text{ALEMAM} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 11 & 9 \\ 21 & 13 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los precios (en €) de la academia difieren si las clases son impartidas por un profesor o por medios audiovisuales:

$$B = \begin{array}{c} \\ PROF. \\ AUDIO. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3^{o}\ ESO & 4^{o}\ ESO & 1^{o}\ BAC & 2^{o}\ BAC \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4,5 & 4,5 & 6 & 7,5 \\ 4,8 & 4,8 & 5,4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcula los ingresos de la academia por idioma impartido y por método empleado, si los alumnos optasen, en su totalidad, por uno u otro sistema. ¿Qué modalidad proporciona más ingresos?.

Solución: Multiplicando las matrices B·A obtendremos la matriz ingresos (usando MuPAD)

- A:=matrix([[13,16], [11,9], [21,13], [10,6]])

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 11 & 9 \\ 21 & 13 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

- B:=matrix([[4.5,4.5,6,7.5], [4.8,4.8,5.4,6]])

$$\begin{pmatrix} 4.5 & 4.5 & 6 & 7.5 \\ 4.8 & 4.8 & 5.4 & 6 \end{pmatrix}$$

- B*A

$$\begin{pmatrix} 309.0 & 235.5 \\ 288.6 & 226.2 \end{pmatrix}$$

La matriz solución será: $\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Ing.} & \text{Ale} \end{array} \\ \text{Prof.} & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 309 & 235{,}5 \\ 288{,}6 & 226.2 \end{pmatrix}$} \\ \text{Audiov.} & \end{array}$ que nos indica los ingresos por idioma impartido y por método empleado.

Si todos los alumnos optasen por profesor los ingresos serían 309+235.5 = 544.5€. Si todos los alumnos optasen por técnicas audiovisuales los ingresos serían 288.6+226.2 = 514.8€. Por lo tanto la modalidad que proporciona más ingresos sería la de profesorado.

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcular:

a). $A^t \cdot B$ b). $3A^4 \cdot B$

- A:=matrix([[3,-2,5], [1,5,-4], [0,4,2]])

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- B:=matrix([[-3,4], [5,-7], [2,0]])

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallemos la matriz traspuesta de A

- A_traspuesta:=linalg::transpose(A)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- A_traspuesta*B

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 39 & -43 \\ -31 & 48 \end{pmatrix}$$

- 3*A^4*B

$$\begin{pmatrix} 11241 & -18024 \\ -6351 & 12063 \\ -5904 & 5052 \end{pmatrix}$$

2) Calcular el determinante y la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ -7 & -3 & 6 & -9 \\ 8 & 7 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

- A:=matrix([[5,–2,3,4], [–7,–3,6,-9], [8,7,–2,5], [–3,5,–9,4]])

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ -7 & -3 & 6 & -9 \\ 8 & 7 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

- linalg::det(A)

$$-1237$$

- A^(–1)

$$\begin{pmatrix} -\frac{348}{1237} & -\frac{295}{1237} & -\frac{3}{1237} & -\frac{312}{1237} \\ \frac{161}{1237} & \frac{268}{1237} & \frac{204}{1237} & \frac{187}{1237} \\ \frac{429}{1237} & \frac{353}{1237} & \frac{121}{1237} & \frac{214}{1237} \\ \frac{503}{1237} & \frac{238}{1237} & \frac{15}{1237} & \frac{323}{1237} \end{pmatrix}$$

3) Hallar los valores de **”*m*”** para que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. Calcular la inversa para ***m*** = 3.

Solución:

- A:=matrix([[1,1,1], [m,1,m-1], [1,m,1]])

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de m / det(A)<>0, serán los que hacen invertible a la matriz.

- solve(linalg::det(A)=0,m)

$$\{1\}$$

Por tanto la matriz será invertible para todo valor de "m" menos el 1. y la matriz inversa será:

- A^(–1)

$$\begin{pmatrix} \frac{m-m^2+1}{m-1} & 1 & \frac{m-2}{m-1} \\ -\frac{1}{m-1} & 0 & \frac{1}{m-1} \\ m+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa para el caso de m = 3 será:

- subs(A^(-1), m = 3)

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Calcular $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

- linalg::det(matrix([[a,1,1,1], [1,a,1,1], [1,1,a,1], [1,1,1,a]]))

$$8 \cdot a - 6 \cdot a^2 + a^4 - 3$$

- factor(%)

$$(a+3) \cdot (a-1)^3$$

5) Calcular el rango de la matriz: $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

- B:=matrix([[2,-5,4,8], [4,-7,2,3], [4,6,-4,3]])

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- linalg::rank(B)

$$\boxed{3}$$

6) Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución: Comprobemos primero si la matriz del sistema es invertible:

- A:=matrix([[3,1,–1], [2,–1,2], [1,–3,6]]); determinante=linalg::det(A)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{determinante} = -5$$

La solución será la matriz columna A^(–1)*B

- B:=matrix([[1], [2], [3]]); Solucion=A^(–1)*B

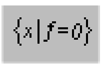
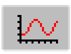
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solucion} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

7) Sistemas de ecuaciones lineales

1) Resuelve el siguiente sistema numéricamente y gráficamente: $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Solución: Inserta las siguientes órdenes, usando la barra de herramientas o la barra de menús:

ACCIÓN	EXPRESIÓN	BARRA DE HERR.	BARRA DE MENÚS
Resolver ecuaciones o sistemas	solve(%?, %?)		*Extras/solve/Exact*
Aproximar	float(%?)		
Representación gráfica	plotfunc2d(%?)		*Extras/Plot 2D Function*

- solve({x^2+y=1, x-y=2}, {x,y})

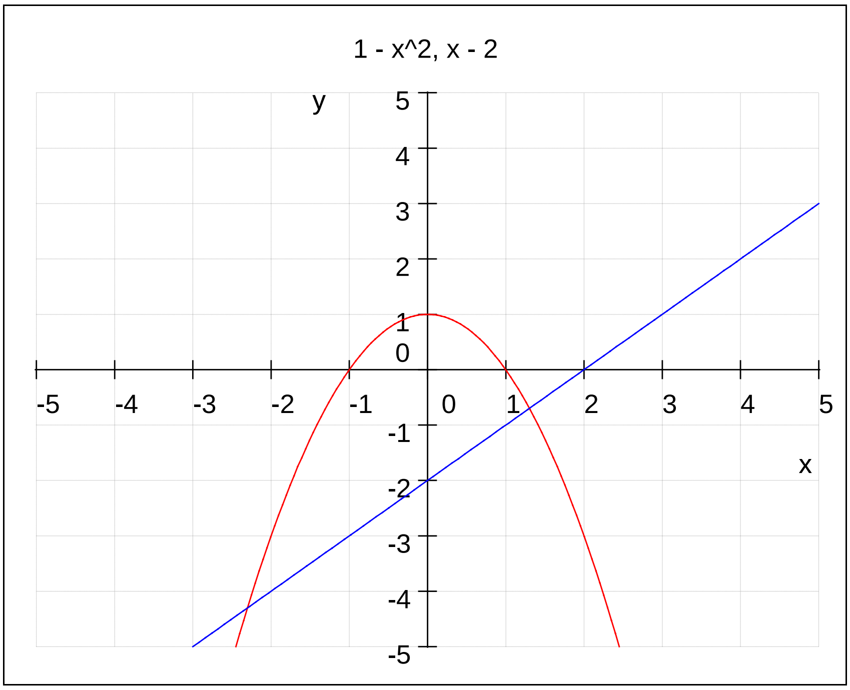
$$\left\{\left[x = -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2},\ y = -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{5}{2}\right],\ \left[x = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{5}{2}\right]\right\}$$

- float(%)

$$\{[x = -2.302775638,\ y = -4.302775638],\ [x = 1.302775638,\ y = -0.6972243623]\}$$

(**%** en MuPAD siempre hace referencia a la última salida. **float()** expresa un número decimal en notación de coma flotante).

- plotfunc2d(1–x^2, x–2,x=–5..5, y=–5..5, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=1,Steps=1])



(GridLines=Automatic genera la rejilla de la gráfica. Ticks=[Steps=1, Steps=1] indica que el paso en las rejillas, de 1 en 1 para las abcisas y de 1 en 1 para las ordenadas).

2) Resolver los sistemas:

$$a.\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases} \quad b.\begin{cases} 7x - 5y - z = 11 \\ x + 2y - 4z = 7 \\ 8x - 3y - 5z = 18 \end{cases} \quad c.\begin{cases} 3x - 6y + 12z = 9 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 2x - 4y + 8z = 6 \end{cases} \quad d.\begin{cases} x - 3y = -3 \\ xy = 6 \end{cases}$$

- solve({2*x–y+3*z=1, x+3*y–4*z=2, 3*x+2*y–z=1}, {x,y,z})

$$\emptyset$$

El sistema a. es incompatible (no tiene solución).

- solve({7*x–5*y–z=11, x+2*y–4*z=7, 8*x–3*y–5*z=18}, {x,y,z})

$$\boxed{\left\{\left[x = \frac{22 \cdot z}{19} + 3,\ y = \frac{27 \cdot z}{19} + 2\right]\right\}}$$

El sistema b. es compatible indeterminado, la solución depende de un parámetro (los tres planos se cortan en una recta).

- solve({3*x–6*y+12*z=9, x–2*y+4*z=3, 2*x-4*y+8*z=6}, {x,y,z})

$$\boxed{\{[x = 2 \cdot y - 4 \cdot z + 3]\}}$$

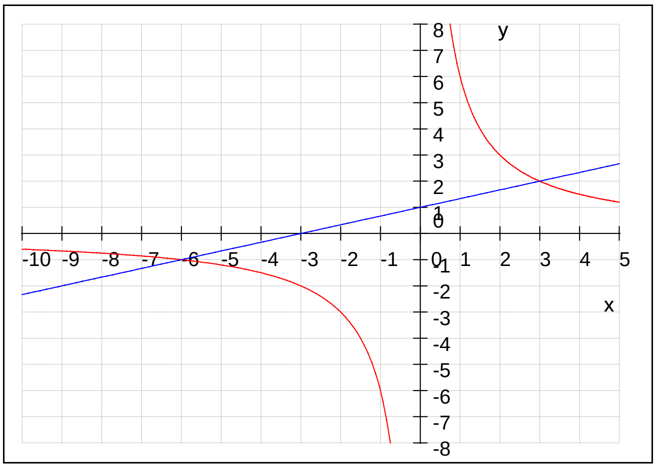
El sistema es compatible indeterminado, la solución depende de dos parámetros (los tres planos son coincidentes).

- solve({x*y=6, x–3*y=–3}, {x,y})

$$\boxed{\{[x = 3,\ y = 2],\ [x = -6,\ y = -1]\}}$$

El sistema d. tiene dos soluciones, la hipérbola y la recta se cortan en dos puntos.

- plotfunc2d(6/x,(x+3)/3, x=–10..5, y=–8..8, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=1,Steps=1])



3) La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?.

Sol. Sea ***x*** la edad actual del padre. Sea ***y*** la edad actual del hijo mayor. Sea ***z*** la edad actual del hijo menor. La edad del padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos:

$$x = 2(y+z) \Rightarrow \boxed{x-2y-2z = 0}$$

Hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos ***y-z***) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos:

$$x-(y-z) = 3(y-(y-z)+z-(y-z)) \Rightarrow x-y+z = 3(z+2z-y) \Rightarrow x-y+z = 9z-3y \Rightarrow \boxed{x+2y-8z = 0}$$

Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos la suma de edades de las tres personas será 150 años:

$$x+(y+z)+y+(y+z)+z+(y+z) = 150 \Rightarrow \boxed{x+4y+4z = 150}$$

Se trata en principio de resolver el sistema: $\begin{cases} x-2y-2z=0 \\ x+2y-8z=0 \\ x+4y+4z=150 \end{cases}$ realicémoslo utilizando el programa MuPAD

- solve({x–2*y–2*z=0,x+2*y–8*z=0,x+4*y+4*z=150},{x,y,z})

$$\boxed{\{[x=50,\ y=15,\ z=10]\}}$$

Las edades actuales son Padre 50 años, hijo mayor 15 años, hijo menor 10 años. Por lo tanto el padre tenía 50-15 = 35 años al nacer su primer hijo y 50-10 = 40 años al nacer su segundo hijo.

4) Discute y resuelve: a. $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+a^2y=a \\ ax+y=a^2 \\ a^2x-ay=1 \end{cases}$

a. Discute y resuelve el sistema: $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$

- S:={k*x+y+z=1, x+k*y+z=k, x+y+k*z=k^2}, {x,y,z}

$$\boxed{\{x+z+k\cdot y=k,\ y+z+k\cdot x=1,\ x+y+k\cdot z=k^2\},\ \{x,\ y,\ z\}}$$

- A:=matrix([[k,1,1], [1,k,1], [1,1,k]])

$$\boxed{\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}}$$

Consideremos la matriz ampliada

- A_ampliada:=linalg::concatMatrix(A,matrix([[1], [k], [k^2]]))

$$\boxed{\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}}$$

Calculemos los valores de k que hacen 0 al determinante de A.

- solve(linalg::det(A)=0, k)

$$\{-2,\ 1\}$$

Si k<>-2 o k<>1 el sistema es compatible y determinado. Ya que rango(A) = rango(A|) = 3 = nº de incógnitas. La solución es:

- solve(S)

$$\boxed{\left\{\left[x = \frac{-k-1}{k+2},\ y = \frac{1}{k+2},\ z = \frac{2\cdot k + k^2 + 1}{k+2}\right]\right\}}$$

Caso k = –2

- A2:=subs(A, k = –2): B2:=subs(A_ampliada, k = –2):A2,B2

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

- linalg::rank(A2), linalg::rank(B2)

$$\boxed{2,\ 3}$$

Sistema incompatible (no tiene solución).

Caso k = 1

- A3:=subs(A, k = 1): B3:=subs(A_ampliada, k = 1):A3,B3

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sistema compatible indeterminado con (nº de incógnitas-rango(A)) = 2 grados de indeterminación: la solución es un plano.

- S2:=subs(S, k = 1), solve(S2)

$$\boxed{\{x+y+z=1\},\ \{x,\ y,\ z\},\ \{[x = 1 - z - y]\}}$$

b) Discute y resuelve el sistema $\begin{cases} x+a^2y=a \\ ax+y=a^2 \\ a^2x-ay=1 \end{cases}$

- S:={x+a^2*y=a, a*x+y=a^2, a^2*x–a*y=1}, {x,y}

$$\left\{y+a\cdot x=a^2,\ x+a^2\cdot y=a,\ a^2\cdot x-a\cdot y=1\right\},\ \{x,\ y\}$$

Calculemos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

- A:=matrix([[1,a^2], [a,1], [a^2,–a]])

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a & 1 \\ a^2 & -a \end{pmatrix}$$

Consideremos la matriz ampliada

- B:=linalg::concatMatrix(A,matrix([[a], [a^2], [1]]))

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores de k que hacen 0 al determinante de A.

- solve(linalg::det(B)=0, a)

$$\left\{1,\ -\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2},\ \frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right\}$$

Si a<>1 el sistema es incompatible ya que rango(A|) = 3>rango(A) = 2. ¿porqué rango de A<>1? Las tres rectas no se cortan simultáneamente. Las tres se cortan dos a dos o bien dos paralelas y la tercera secante a las otras dos.

Caso a = 1

- A2:=subs(A, a = 1): B2:=subs(B, a = 1):A2,B2

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

- linalg::rank(A2), linalg::rank(B2)

$$\boxed{2,\ 2}$$

Sistema compatible determinado. Las dos primeras rectas son coincidentes y la tercera es secante con ellas. La solución del sistema será:

- solve({x+y=1,x–y=1},{x,y})

$$\{[x = 1,\ y = 0]\}$$

- plotfunc2d(1–x, x–1,x=–5..5, y=–5..5, GridLines=Automatic, Ticks=[Steps=1,Steps=1])