TALLER DE ESTADÍSTICA

4. PROBABILIDAD GEOMÉTRICA, GRAFOS Y PROCESOS ALEATORIOS.

MAURICIO CONTRERAS

PROBABILIDAD GEOMÉTRICA EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

El concepto de probabilidad admite diferentes puntos de vista y todos ellos deben ser abordados en el proceso de enseñanza–aprendizaje. El punto de vista frecuentista es experimental y está relacionado con el concepto de probabilidad a posteriori. El punto de vista subjetivo está relacionado con la probabilidad a priori y se basa en consideraciones de simetría. Una de éstas –la más utilizada– está basada en la asignación de probabilidades de forma proporcional a ciertas medidas geométricas, como la longitud o el área. En las siguientes páginas se muestran algunas actividades experimentadas en ESO y Bachillerato que pueden ser útiles para tratar los dos visiones del concepto de probabilidad. Las actividades señaladas con (*) son específicas de Bachillerato porque requieren un mayor grado de formalización, aunque alguna parte de ellas se puede hacer en 3º o 4º de ESO.

1. Frecuencia y probabilidad

- **FRECUENCIA ABSOLUTA**

La frecuencia absoluta de un dato estadístico es el número total de veces que aparece este valor o dato en dicha estadística.

1) Hemos preparado una encuesta para cada uno de los alumnos de tu clase. La pregunta formulada ha sido: ¿cuántos hermanos sois en tu familia?. Estas son las respuestas que hemos obtenido:

   2 3 3 2 2 3 3 1 1 2 2 3 1 1 4 2 2 3 4 2 1 2 4 2 5

   Construye la tabla de frecuencia absolutas.

2) Hemos lanzado al aire 4 monedas 20 veces y hemos anotado el número de caras en cada lanzamiento. Los resultados obtenidos son:

3	4	2	2	1	1	1	0	2	3	0	3	2	2	2	1	3	1	1	2

   Haz el recuento y la correspondiente tabla estadística.

3) Los pesos de 30 alumnos de tu clase, en kg, son:

48	48	50	55	59	54	60	60	64	65	69	57	62	70	59
57	52	60	53	57	53	45	54	47	59	60	57	66	62	55

   Construye la correspondiente tabla estadística con las marcas de clase, utilizando cinco intervalos de igual amplitud.

- **FRECUENCIAS RELATIVAS Y FRECUENCIAS ACUMULADAS**

1) Construye, para cada una de las actividades del problema anterior, una tabla estadística en la que figuren marca de clase o valores de la variable, frecuencias absolutas y relativas y frecuencias absolutas y relativas acumuladas.

2) Comprueba en las tablas estadísticas anteriores que:

   a) La frecuencia absoluta está comprendida entre 0 y el número total de pruebas, N.

   b) La frecuencia relativa está comprendida entre 0 y 1.

   c) La última frecuencia absoluta acumulada es igual al número total de datos o pruebas.

   d) La última frecuencia relativa acumulada es igual a 1.

- **<u>FENÓMENOS DETERMINISTAS Y ALEATORIOS</u>**

<u>Fenómenos o experimentos deterministas</u> son aquellos que, realizados en las mismas circunstancias, sólo tienen un resultado posible.

<u>Fenómenos o experimentos aleatorios</u> son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de estos va a ser observado en la realización del experimento.

1) Analiza si los siguientes fenómenos son deterministas o aleatorios e indica los posibles resultados que pueden aparecer en cada caso. ¿Cuál de ellos crees que aparecerá con más frecuencia?.

   * Las características heredadas en el nacimiento: sexo, color de la piel, la altura de los adultos, el peso de los adultos.
   * El tiempo que hará el 24 de Junio.
   * La hora a la que amanecerá el 14 de Julio.
   * Las creencias religiosas de una persona elegida al azar.
   * Lanzar una moneda al aire.
   * El número de hijos de una familia.
   * Lanzar dos dados.
   * Lanzar una piedra al vacío y medir su aceleración.
   * Abrir un libro al azar y anotar el número de la página de la izquierda.
   * Número obtenido al girar una ruleta.
   * El número de accidentes de tráfico durante un fin de semana.
   * Medir la longitud de una circunferencia de 3 metros de radio.
   * Extraer dos cartas de una baraja española.

2) Busca tres ejemplos de fenómenos deterministas y otros tres de fenómenos aleatorios. Analiza y describe todos los resultados posibles que puedan suceder.

- **<u>SUCESOS</u> (*)**

(La formalización de los conceptos que aparecen aquí debe hacerse en Bachillerato)

<u>Espacio muestral</u> es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un fenómeno o experimento aleatorio. Se representa por E. Los resultados posibles del experimento se llaman <u>sucesos elementales</u>.

<u>Suceso</u> es un subconjunto del espacio muestral E.

<u>Suceso seguro</u> es el que siempre se verifica al realizar el experimento aleatorio. Está formado por todos los resultados posibles del experimento y coincide con el espacio muestral E.

<u>Suceso imposible</u> es el que nunca se verifica. Se representa por Φ.

Por ejemplo, en el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado cúbico, el espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos considerar algunos sucesos asociados a este espacio muestral:

A = *Salir par* = $\{2, 4, 6\}$	B = *Salir impar* = $\{1, 3, 5\}$
C = *Salir número primo* = $\{2, 3, 5\}$	D = *Salir número menor que 3* = $\{1, 2\}$
F = *Salir número mayor que 7* = Φ	G = *Salir número menor que 8* = E

1) Tenemos una bolsa con nueve bolas numeradas del 1al 9. Realizamos el experimento que consiste en sacar una bola de la bolsa, anotar el número y devolverla a la bolsa. Halla el espacio muestral y construye los siguientes sucesos: A={obtener número impar}, B={obtener número primo}, C={obtener número mayor que 6}.

2) Hemos observado la distribución por sexo de los hijos en las familias compuestas de cuatro hijos. Halla el espacio muestral. Sean los sucesos: A={el hijo mayor es varón}, B={los dos hijos menores son hembras}, C={los dos hijos mayores son de diferente sexo}. ¿Cuáles son los sucesos elementales de A, B y C?.

3) En una encuesta realizada entre los alumnos del Instituto que cursan 3º ESO, se les pregunta por los siguientes datos: sexo (hombre o mujer), idioma (francés o inglés) y religión o ética. Forma el espacio muestral.

4) Dos amigos A y B juegan unas partidas de ping-pong y deciden que el ganador será aquél que gane dos partidas seguidas o tres alternativas. Halla el espacio muestral. Si decidiesen que el ganador va a ser aquél que gane dos partidas consecutivas, ¿cuál sería el espacio muestral?.

- **OPERACIONES CON SUCESOS (*)**

(La formalización de los conceptos que aparecen aquí debe hacerse en Bachillerato)

Dados dos sucesos A y B, llamamos intersección de dichos sucesos y lo representamos por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando ocurren A y B al mismo tiempo. Sus sucesos elementales son los comunes a A y B.

Dados dos sucesos A y B, llamamos unión de dichos sucesos y lo representamos por $A \cup B$, al suceso que ocurre cuando ocurre A, ocurre B o bien ocurren A y B al mismo tiempo. Sus sucesos elementales son los que pertenecen a A, a B o a $A \cap B$.

Dos sucesos A y B son compatibles si $A \cap B \neq \Phi$. Dos sucesos A y B son incompatibles si $A \cap B = \Phi$.

Dado un suceso A, llamamos suceso contrario de A al suceso que se verifica cuando no se verifica A. Se representa por $\overline{A}$, por A' o por A^c.

La unión de dos sucesos contrarios es el suceso seguro: $A \cup \overline{A} = E$.

La intersección de dos sucesos contrarios es el suceso imposible: $A \cap B = \Phi$.

El contrario del suceso seguro es el suceso imposible: $\overline{E} = \Phi$.

El contrario del suceso imposible es el suceso seguro: $\overline{\Phi} = E$.

Ejemplos.- En el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado cúbico cuyo espacio muestral es E={1, 2, 3, 4, 5, 6}, consideramos los sucesos: A={salir impar}={1, 3, 5}, B={salir mayor que 2}={3, 4, 5, 6}. El suceso unión es: $A \cup B$={salir impar o mayor que 2}={1, 3, 4, 5, 6}. El suceso intersección es: $A \cap B$={salir impar y mayor que 2}={3, 5}. Los sucesos A y B son compatibles. El suceso contrario de A es $\overline{A} = \{salir\ par\} = \{2,4,6\}$. *El suceso contrario de B es* $\overline{B} = \{salir\ menor\ o\ igual\ que\ 2\} = \{1,2\}$.

1) Realizamos el experimento aleatorio de lanzar un dado cúbico y anotar el resultado. Para cada una de las parejas siguientes de sucesos, halla su unión y su intersección y estudia si son compatibles o incompatibles:

   a) A={salir par} y B={salir número primo}.

   b) E={salir impar} y F={salir múltiplo de 3}

   c) M={salir menor que 7} y N={salir número primo}

2) Consideramos el experimento aleatorio que consiste en sacar una carta de una baraja española y anotar el resultado. Sean los sucesos: A={salir copas}, B={salir caballo}, C={salir as o rey de copas}. Expresa en lenguaje cotidiano el significado de los siguientes sucesos:

   a) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ b) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ c) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

3) Tenemos una bolsa con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento que consiste en sacar una bola de la bolsa, anotar el número y devolverla a la bolsa. Consideramos los siguientes sucesos: A={salir número primo} y B={salir un número cuadrado}.

   a) Calcula los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

   b) Los sucesos A y B, ¿son compatibles o incompatibles?.

   c) Halla los sucesos contrarios de A y B.

4) Lanzamos tres monedas del mismo tipo y observamos los resultados obtenidos. Halla el espacio muestral. Construye los sucesos A={salir una cara} y B={salir alguna cara}. Halla $A \cup B$ y $A \cap B$. Halla los sucesos contrarios de A y B.

- **<u>DADO Y MONEDAS</u> (*)**

(La formalización de los conceptos que aparecen aquí debe hacerse en Bachillerato)

1) Con un dado cúbico realiza 120 lanzamientos anotando los resultados. Considera los sucesos: A={sale puntuación par}, B={sale puntuación impar}, C={sale número primo}. Calcula $f_r(A)$, $f_r(B)$, $f_r(C)$, $f_r(A \cup B)$, $f_r(A \cap C)$, $f_r(A \cup C)$, $f_r(A \cap C)$, $f_r(B \cup C)$, $f_r(B \cap C)$. Extrae conclusiones.

2) Disponemos de dos monedas del mismo tipo. Las lanzamos al aire y anotamos el número de caras obtenidas. Realiza esta experiencia 100 veces. Considera los sucesos A={ninguna cara}, B={una cara} y C={Por lo menos una cara}. Calcula $f_r(A)$, $f_r(B)$, $f_r(C)$, $f_r(A \cup B)$, $f_r(A \cap C)$, $f_r(A \cup C)$, $f_r(A \cap C)$, $f_r(B \cup C)$, $f_r(B \cap C)$. ¿Cuáles son tus conclusiones?.

Si dos sucesos A y B son incompatibles, entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$.

Si dos sucesos A y B son compatibles, entonces $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$

- **GRADOS DE PROBABILIDAD**

1) Asigna las palabras improbable, posible o seguro, según convenga, a las siguientes situaciones:

   a) Que un equipo de 1ª División de baloncesto gane algún encuentro de la temporada regular.

   b) Que Juan coja un catarro este invierno.

   c) Que el día 12 de diciembre haga buen tiempo.

   d) Obtener un doble uno al lanzar dos dados.

2) Busca un suceso de cada uno de los siguientes tipos:

   a) casi seguro b) poco probable c) muy probable

   d) casi imposible e) medianamente probable f) imposible

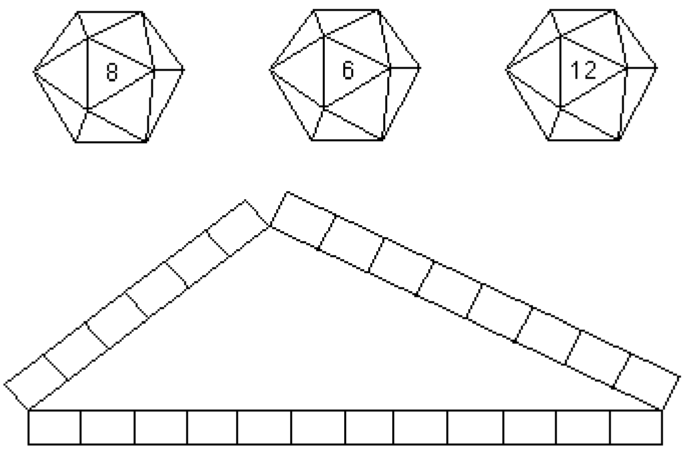
3) Asigna un número entre 0 y 1 a cada una de las siguientes expresiones, según el grado de posibilidad que consideres que implican:

Dudoso		Muy probable		Posibilidad razonable	
Quizás		Alta posibilidad		Es posible que	
Casi seguro		Es seguro que		Casualmente	
Poca posibilidad		Podría ser		Incierto	

2. Probabilidad geométrica

- **TRIÁNGULOS AL AZAR**

Lanzamos tres dados icosaédricos y tomaremos los resultados que muestren como las medidas de tres segmentos.



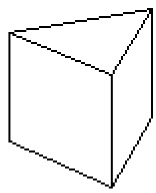
¿A qué apuestas?

a) Con esos tres segmentos se podrá construir un triángulo.

b) Con esos tres segmentos no se podrá construir un triángulo.

- **<u>UN PRISMA TRIANGULAR DE MADERA</u>**

No todos los dados son regulares. Aquí tienes uno que no lo es.

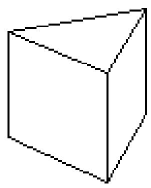


1) ¿Hay equiprobabilidad entre las caras?. El dado ¿muestra algún sesgo?.

2) Al lanzar este prisma triangular, ¿qué es más fácil, obtener una cara triangular o una rectangular?. Suponiendo que un jugador apuesta por rectángulo y su contrario por triángulo, ¿en qué proporción deben hacerse las apuestas para que el juego sea equitativo?.

   Para verificar tu conjetura, puedes efectuar una tanda de 20 lanzamientos del dado, anotando los resultados de cada lanzamiento. ¿Cuándo sale rectángulo?. ¿Cuándo sale triángulo?. ¿Qué criterio eliges para decidir si sale una cosa u otra?.

   Recoge la información obtenida en tu clase en una tabla como la siguiente:

	CARA	RECUENTO	FRECUENCIA
	triángulo		
	rectángulo		

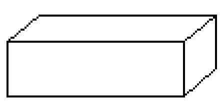
   ¿De qué crees que depende el hecho de que salga triángulo o rectángulo?. Si piensas que en todo este asunto tiene que ver el área de cada cara, compara las áreas de triángulo y rectángulo. ¿Cómo puedes hacerlo?.

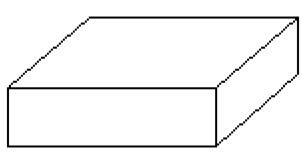
3) ¿Qué ocurre si se varían las dimensiones del prisma?.

4) ¿Se puede construir un dado prismático en que la cara triangular tenga igual probabilidad de salir que la rectangular?. ¿Y de que tenga doble probabilidad?.

- **<u>PRISMAS DE MADERA</u>**

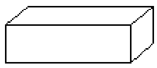
Se admiten apuestas: Lanzamos un dado prismático que consta de dos cuadrados y cuatro rectángulos. Pero disponemos de dos tipos de estos dados: uno con cuadrados pequeños y otro con cuadrados más grandes:

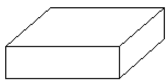




En cada uno de los dados anteriores, ¿qué es más fácil, que salga cuadrado o que salga rectángulo?. ¿En qué proporción deberían hacerse las apuestas en cada dado para que el juego sea equitativo?.

Para verificar tus conjeturas, efectúa con cada dado una tanda de 20 lanzamientos, anotando los resultados de cada lanzamiento. Recoge la información obtenida en tu clase en dos tablas como las que siguen:

	CARA	RECUENTO	FRECUENCIA
	cuadrado pequeño		
	rectángulo		

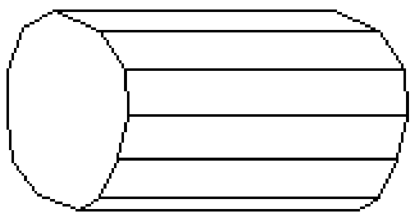
	CARA	RECUENTO	FRECUENCIA
	cuadrado grande		
	rectángulo		

¿Qué conclusiones obtienes?.

Compara en cada dado las áreas de “cuadrado” y “rectángulo”. ¿Cómo puedes hacerlo?. ¿De qué depende, pues, la frecuencia de “cuadrado” o de “rectángulo”?.

- **DADO PRISMÁTICO**

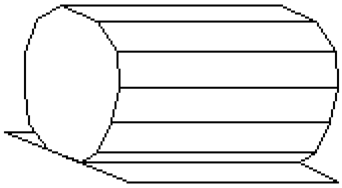
Al lanzar un dado prismático, es razonable pensar que la probabilidad de obtener una cara es proporcional a su superficie; pero, imaginemos por un momento que cambiamos el prisma triangular por este otro casi cilíndrico:



1) ¿Qué es más fácil que caiga sobre una de las caras laterales o sobre una de las bases?. Efectúa 50 lanzamientos, anota los resultados, recoge la información obtenida en tu clase y comprueba tu conjetura.

Observa que al lanzar este dado es muy probable que caiga sobre una de las caras laterales. Sin embargo, la superficie de esa cara es muy pequeña.

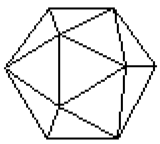
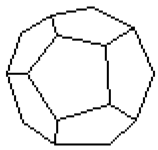
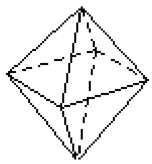
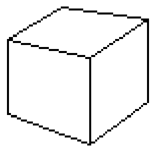
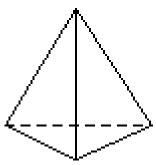
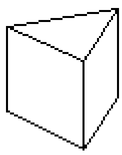
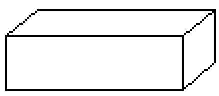
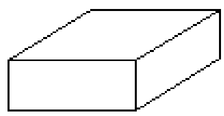
Entonces, cuando hablamos de superficie, ¿a qué superficie nos referimos, a la de la cara que queda en contacto con el suelo o a la de la proyección del prisma sobre éste?.



2) ¿Es posible diseñar dos dados prismáticos que tengan la misma superficie lateral y la misma superficie en las bases y que exhiban comportamientos aleatorios distintos?.

- **<u>DADOS POLIÉDRICOS</u>**

En el mercado existen muchos tipos de dados. Aquí tienes unos cuantos:

			
ICOSAEDRO	DODECAEDRO	OCTAEDRO	CUBO
			
TETRAEDRO	PRISMA TRIANGULAR	PRISMAS DE BASE CUADRADA	

a) Observa detenidamente cómo están distribuidos los puntos y números en las caras de cada dado. ¿Observas algo interesante?. ¿Por qué crees que se han construido de esa forma?.

b) En cada uno de los dados anteriores, cuenta el número de caras, vértices y aristas. ¿Cómo puedes hacerlo?.

c) ¿Cuántas veces has de lanzar un dado cúbico para obtener un 6?. ¿Y un octaedro?. ¿Y un dodecaedro?.

Para averiguarlo, puedes realizar la siguiente experiencia: lanza cada uno de los dados anteriores hasta que te salga un 6 y cuenta el número de lanzamientos que has necesitado. Repite esta experiencia 10 veces. La información obtenida en tu clase, puedes recogerla en una tabla como la siguiente:

DADO	Nº DE LANZAMIENTOS	RECUENTO	FRECUENCIA
CUBO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	más de 7 ( )		
OCTAEDRO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	más de 10 ( )		
DODECAEDRO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	11		
	12		
	13		
	más de 13 ( )		

Halla la media aritmética en cada caso. ¿Qué conclusiones obtienes?.

3. Estabilidad de frecuencias y asignación de probabilidades

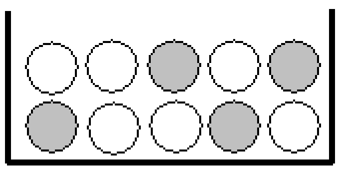
- **ESTABILIDAD DE LAS FRECUENCIAS**

Seguramente ya sabes que:

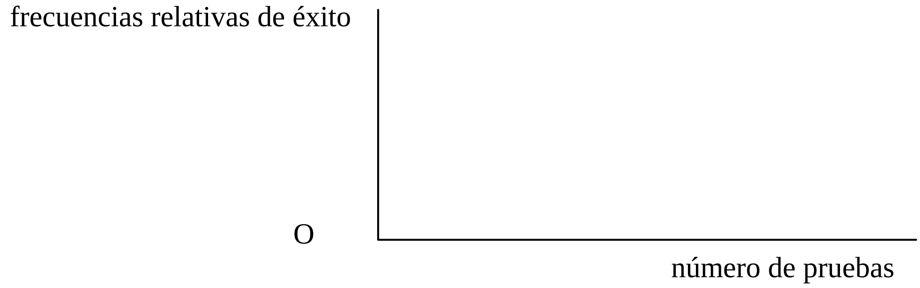
a) Si lanzas una moneda muchas veces (cuantas más mejor), la frecuencia (relativa) que esperas para la aparición de “cara” (éxito) es 1 / 2.

b) Si lanzas un dado muchas veces, la frecuencia relativa que esperas para la aparición de un “seis” (éxito) es 1/6.

c) Si extraes, devolviendo después de la extracción, una bola de la urna adjunta, la frecuencia relativa que esperas para la aparición de una bola “negra” (éxito) es 4/10.



En cada caso, repite la experiencia 10 veces, anotando la frecuencia relativa de éxito. Recoge la información obtenida en tu clase y dibuja la gráfica que dé la frecuencia relativa del de éxito según el número de pruebas:



Comprueba que, en cada caso, la frecuencia relativa obtenida se acerca cada vez más a la esperada.

Al efectuar un gran número de pruebas de un experimento aleatorio, se observa que las frecuencias relativas de un suceso A se acercan cada vez más y más a un cierto número, estabilizándose en torno a él. Este número se llama probabilidad del suceso A y se representa por p(A). Esta propiedad se conoce como ley de los grandes números.

- **CUATRO LETRAS**

¿Qué valor asignas a la probabilidad de que elegida al azar una palabra de un libro, tenga cuatro letras?.

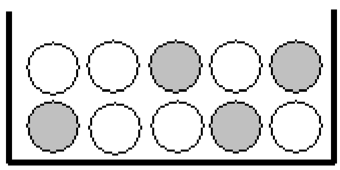
Utiliza la experimentación repetidas veces, la estabilidad de las frecuencias relativas y la ley de los grandes números.

- **DIAGRAMAS**

a) Lanza una moneda dos veces y anota el número de éxitos (éxito=cara). Repítelo 50 veces.

b) Lanza un dado seis veces y anota el número de éxitos (éxito=seis). Repítelo 50 veces.

c) Extrae una bola de la urna adjunta, diez veces, y anota el número de éxitos (éxito=bola negra). Repítelo 50 veces.



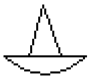
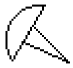
Agrupa los resultados en cada caso y dibuja el diagrama de rectángulos correspondiente. Comenta los resultados.

Al efectuar un gran número de pruebas de un experimento aleatorio, se observa que los diagramas de rectángulos se acercan cada vez más y más a la distribución esperada.

- **CHINCHETAS**

Se lanza una chincheta al aire. Puede caer con la punta hacia arriba o tocando el suelo. ¿A cuál de las dos posibilidades apostarías?.

Para fundamentar un poco tus opiniones, efectúa 30 lanzamientos de una chincheta y anota los resultados. La información obtenida en tu clase puedes recogerla en una tabla como la siguiente:

RESULTADOS	RECUENTO	FRECUENCIAS
		
		

¿Qué conclusiones obtienes?.

¿Qué probabilidad asignarías a cada uno de los resultados?.

Hay ocasiones en que la experiencia que se va a realizar tiene unas condiciones de simetría tales que es posible conocer, antes de efectuar ninguna prueba, cuál será la probabilidad de un suceso. Posteriormente, la experimentación dará unos resultados que confirmarán la conjetura previamente formulada. La probabilidad asignada al suceso antes de experimentar se llama probabilidad a priori.

Pero hay otras ocasiones en las que no tenemos ninguna referencia a priori. Entonces sólo la experimentación dará unos resultados que serán tanto más fiables, cuanto mayor sea el número de pruebas realizadas. En este caso, la probabilidad asignada al suceso coincide con su frecuencia relativa (para un elevado número de pruebas) y se llama probabilidad a posteriori.

- **ABUNDANCIA DE VOCALES**

La palabra "abundancia" tiene 5 vocales y 5 consonantes; la palabra "vocales" tiene 3 vocales y 4 consonantes. Nuestro alfabeto consta de 5 vocales y 23 consonantes; la relación 5: 23 entre vocales y consonantes está lejos de cumplirse en las dos palabras anteriores, 1 : 1 y 3 : 4, respectivamente. Si eliges al azar varios textos, de cinco líneas cada uno, por ejemplo, la proporción de vocales y consonantes variará seguramente de uno a otro. Por eso será más natural hacer conjeturas del tipo "la proporción de vocales en cualquier texto oscila entre el 60% y el 70%".

Vas a elegir otro texto al azar. ¿En qué intervalo apostarías que está el porcentaje de vocales?. ¿En el 20%–30%?, ¿en el 30%–40%?...

- **LENGUAS**

Se trata de comparar dos párrafos, tomados al azar, de al menos dos lenguas distintas:

a) ¿En qué proporción aparecen las vocales y consonantes?

b) ¿En qué proporción aparece cada vocal?

c) ¿Cuál es la longitud media de las palabras?.

Recoge la información obtenida en tu clase y analiza los datos disponibles. ¿Qué conclusiones se pueden extraer de este estudio?.

- **LEY DE LAPLACE**

En algunos experimentos aleatorios, podemos suponer que, por las condiciones de simetría, todos los sucesos elementales son equiprobables. En estos casos, la probabilidad de cada suceso elemental es:

$$p(\text{suceso elemental}) = \frac{1}{n^o \text{ de sucesos elementales de } E}$$

Si los sucesos elementales son equiprobables, entonces la probabilidad de cualquier suceso A es:

$$p(A) = \frac{n^o \text{ de sucesos elementales de } A}{n^o \text{ total de sucesos elementales}} = \frac{n^o \text{ de casos favorables al suceso } A}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

Esta fórmula se conoce como ley de probabilidad de Laplace.

1) En el experimento aleatorio de lanzar cuatro monedas diferentes, calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

   A={obtener dos caras}, B={obtener al menos una cruz}, C={obtener tres caras}.

2) De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

   a) Sacar una bola roja; b) Sacar una bola verde;

   c) Sacar una bola roja o verde; d) Sacar una bola no roja.

3) Calcula la probabilidad de tener cuatro hijas en las familias formadas por cuatro hijos.

- **APUESTAS**

a) Después de obtener cinco “caras” en cinco lanzamientos consecutivos de una moneda, ¿apostarías por “cara” en el siguiente lanzamiento?.

b) ¿Apostarías mil euros contra mil a que el próximo recién nacido en una clínica será zurdo?.

- **DOS DADOS**

Lanzamos dos dados cúbicos de diferente color y anotamos la suma de los puntos obtenidos. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener suma igual a tres.

b) Obtener suma igual a seis.

c) Obtener suma mayor o igual a diez.

- **TRES MONEDAS (*)**

(La formalización de los conceptos que aquí aparecen debe hacerse en Bachillerato)

Lanzamos al aire tres monedas y observamos los resultados obtenidos. Consideramos los siguientes sucesos: A={salir una cara}, B={salir alguna cara} y C={no salir cara}.

Calcula $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap C)$, $p(A \cup C)$, $p(A \cap C)$, $p(B \cup C)$, $p(B \cap C)$.
Extrae conclusiones.

Si dos sucesos A y B son incompatibles, entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
Si dos sucesos A y B son compatibles, entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

- **BARAJA**

Extraemos una carta de una baraja española.

a) Halla la probabilidad de que la carta extraída sea sota o caballo.

b) Halla la probabilidad de que la carta extraída sea una copa o una sota.

c) Halla la probabilidad de que la carta extraída sea una copa o el as de bastos.

- **SUCESOS CONTRARIOS (*)**

(La formalización de los conceptos que aparecen aquí debe hacerse en Bachillerato)

Aplicando la regla de Laplace, puedes comprobar que:

La probabilidad del suceso seguro es igual a 1: $p(E)=1$

La probabilidad del suceso imposible es igual a 0: $p(\Phi)=0$

Si A y $\overline{A}$ *son sucesos contrarios, entonces se cumple que* $p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = p(E) = 1$

Por lo tanto se cumple que: "la suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es igual a la unidad".

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1 \rightarrow p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Luego: "la probabilidad de un suceso es igual a uno menos la probabilidad del suceso contrario", fórmula que es muy útil en el cálculo de probabilidades.

1) Halla la probabilidad de no sacar ningún oro al extraer una carta de la baraja.

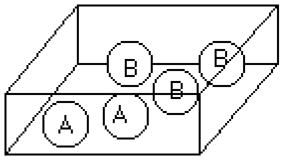
2) Halla la probabilidad de obtener al menos una cara en el lanzamiento de cinco monedas.

3) ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un cuatro cuando lanzamos un dado cúbico?.

4) Lanzamos tres dados. Calcula la probabilidad de obtener por lo menos un cuatro.

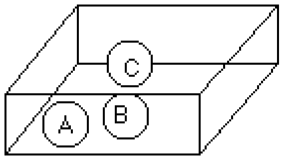
- **URNAS**

1) De la urna de la figura se extraen sucesivamente dos letras al azar. ¿Es muy fácil obtener dos A seguidas?.



2) Construye todas las palabras posibles usando tres letras elegidas entre las letras A, B y C.

3) De la urna de la figura, se extraen sucesivamente tres letras al azar para formar una palabra. ¿Qué palabras se pueden formar?.

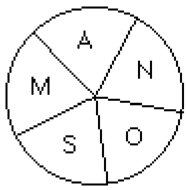


- **MATRÍCULAS**

¿Cuántos coches se pueden matricular en Valencia si cada matrícula, como sabes, lleva un número de cuatro cifras y una palabra de dos letras (por ejemplo, V – 9254 – KL) ?.

- **LA RULETA**

Giro tres veces la siguiente ruleta, anotando ordenadamente los resultados:



¿Es fácil que consiga la palabra S O N ?.

- **FOTOGRAFÍAS**

Luisa, Juan, Ana y Pedro quieren fotografiarse juntos. Desean situarse uno al lado del otro de manera que alternen chicos y chicas. ¿De cuántas maneras pueden hacerse la fotografía?. ¿De cuántas maneras si se suprime la condición de estar alternados?.

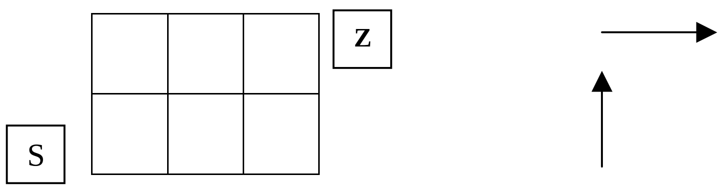
- **MUCHOS CEROS (*)**

a) ¿En cuántos ceros acaba el producto de los cien primeros números naturales?.

b) ¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números naturales?.

- **CAMINOS (*)**

¿Cuántos caminos diferentes hay que lleven de S hasta Z siguiendo el sentido de avance indicado por las flechas?.



- **TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS**

a) Dibuja un decágono regular. ¿Cuántos triángulos hay que tengan sus vértices en los del dodecágono que has dibujado?.

b) ¿Cuántos triángulos diferentes hay que tengan sus vértices en los de un polígono regular de 20 lados?. ¿Y en un polígono regular de n lados?.

Los grupos de n elementos, repetidos o no, elegidos de entre m objetos se llaman variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n y se representan así: $VR_{m,n}$. Se distinguen entre ellos porque difieren en algún elemento o en el orden de colocación. Se cumple que: $\boxed{VR_{m,n} = m^n}$

Los grupos de n elementos diferentes elegidos de entre m objetos se llaman variaciones de m elementos tomados de n en n y se representan así: $V_{m,n}$. Se distinguen entre ellos porque difieren en algún elemento o en el orden de colocación. Se diferencian de las variaciones con repetición en que ahora los elementos no pueden repetirse, es decir, deben ser todos diferentes. Se cumple que:

$$\boxed{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots \quad (n \text{ factores})}$$

Los grupos de n elementos con exactamente n objetos se llaman permutaciones de n elementos. Se distinguen entre ellos porque sólo difieren en el orden de colocación.

Se representan así: $\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad (n \text{ factores})}$

Llamamos factorial de un número al producto de todos los números naturales desde 1 hasta dicho número. La factorial del número N se representa por $N!$, de forma que:

$$\boxed{N! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Por ejemplo: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. *Se cumple que:* $\boxed{P_n = n!}$

Los grupos de n elementos diferentes tomados de entre m objetos se llaman combinaciones de m elementos tomados de n en n y se representan así: $C_{m,n}$. Se distinguen entre ellos porque sólo difieren en algún elemento. Si dos grupos tienen los mismos elementos, son iguales, aunque sus elementos estén dispuestos en orden diferente.

Se cumple que: $$\boxed{C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (n \text{ factores})}{n!}}$$

4. Experiencias compuestas

- **DADO Y RULETA**

Un juego de azar consiste en lanzar un dado y hacer girar una ruleta como la de la figura. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener la misma cifra en el dado y en la ruleta.

b) Sacar un 4 con el dado.

c) Obtener una suma de puntos inferior a 5.

d) Sacar un 5 con el dado y una suma de puntos inferior a 5.

e) No sacar un cuatro con el dado.

- **EXPERIMENTOS COMPUESTOS**

1) Lanzamos un dado tres veces. Calcula la probabilidad de obtener las tres veces un 6.

2) Extraemos consecutivamente con devolución, dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de que ambas sean sotas.

3) En una bolsa tenemos 10 bolas amarillas, 12 bolas rojas y 13 verdes. Extraemos tres bolas. Calcula la probabilidad de que las tres sean verdes: a) reemplazando las bolas extraídas; b) sin reemplazarlas.

Sea A=sale bola verde en la 1º extracción y B=sale bola verde en la 2º extracción. Si las extracciones se hacen sin devolución, la probabilidad de B sabiendo que ha ocurrido A no es la misma que si las extracciones se hacen con devolución.

El suceso "ocurre B sabiendo que ha ocurrido A" se llama <u>suceso B</u> <u>condicionado por A</u> y se representa por B/A. Su probabilidad se llama probabilidad condicionada y se representa por p(B/A) y se lee "<u>probabilidad</u> <u>de</u> <u>B</u> <u>condicionado</u> <u>por</u> <u>A</u>".

4) Se extraen dos bolas, con devolución, de una urna que contiene 2 bolas blancas, 4 rojas y 6 negras. Calcula la probabilidad de que:

   a) las dos sean rojas.

   b) las dos sean negras.

   c) ninguna sea roja.

5) Resuelve la actividad del apartado (4) suponiendo que las extracciones se efectúan sin devolución.

5. Sorteos aleatorios

- **VIAJE ALA NIEVE**

Tres amigas deciden apuntarse a un "viaje a la nieve" organizado en su instituto, pero cuando van a realizar la inscripción, ya sólo quedan dos plazas disponibles. Para decidir quién será la que no haga el viaje, acuerdan realizar un sorteo y se plantean varias posibilidades:

A) Cada una elige un papelito por turno, entre tres, aparentemente iguales. Sin embargo, uno de ellos es más largo que los otros dos, que sí son iguales. Se quedará sin excursión la que elija el más largo.

B) A cada una de las amigas se le asigna uno de los posibles resultados del lanzamiento simultáneo de dos monedas: dos caras, dos cruces, o una cara y una cruz. El resultado obtenido al lanzar una vez dos monedas, decidirá cuál de las tres queda sin viaje.

C) Cada una de ellas elige un número (distinto) del 1 al 6. Se lanzará un dado cúbico hasta obtener uno de los tres números seleccionados. La amiga que hubiera elegido el número obtenido, quedará excluida del viaje.

Si fueras una de las protagonistas de esta situación, ¿te daría lo mismo realizar el sorteo por cualquiera de los tres procedimientos?. ¿Cuál preferirías?. ¿Por qué?.

Efectúa 10 sorteos de cada tipo, con ayuda de tus compañeros, anota los resultados y recoge la información obtenida en tu clase en las siguientes tablas:

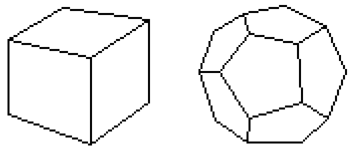
SORTEO A	a	b	c	TOTALES
grupo 1				
grupo 2				
grupo 3				
....				

SORTEO B	a	b	c	TOTALES
grupo 1				
grupo 2				
grupo 3				
....				

SORTEO C	a	b	c	TOTALES
grupo 1				
grupo 2				
grupo 3				
....				

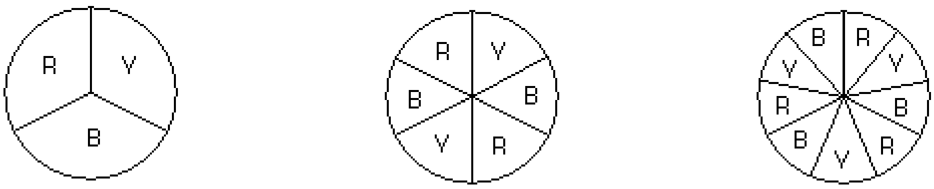
A la vista de los resultados, ¿qué procedimiento utilizarías para efectuar el sorteo?.

- **DADOS Y RULETAS**



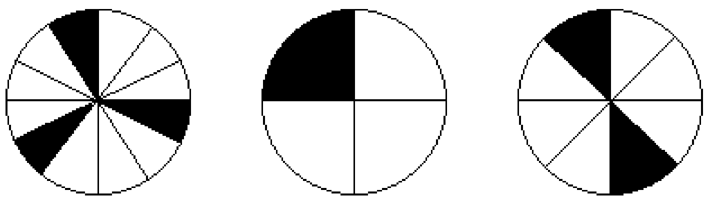
1) Realizar un sorteo entre seis personas con un dado cúbico es cosa fácil, pero ¿qué podemos hacer si sólo disponemos de un dado dodecaédrico?.

2) ¿Cuál de estas ruletas es mejor para realizar un sorteo entre tres personas?

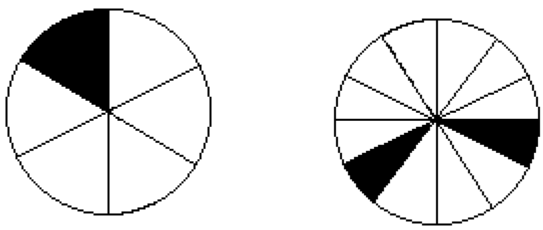


3) Toma un dado regular cualquiera y numera sus caras al azar con 0 y 1. Construye una ruleta equivalente a ese dado.

Observa que la misma distribución de 0 y 1 en un dado puede tener asociadas distintas ruletas equivalentes. Así, tres 0 y nueve 1 sobre las caras de un dado dodecaédrico puede dar lugar a cada una de las siguientes ruletas:



Al mismo tiempo, distribuciones de ceros y unos sobre dados diferentes pueden dar lugar a ruletas equivalentes:



Cubo con un 0 y cinco 1 **Dodecaedro con dos 0 y diez 1**

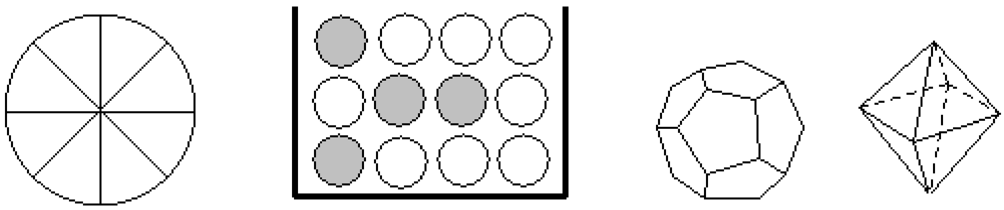
Observa en las actividades anteriores la <u>equivalencia</u> entre <u>sorteos aleatorios</u>, <u>probabilidades</u>, <u>porcentajes</u> y <u>fracciones</u>, así como la utilidad de la <u>analogía</u> como estrategia para la resolución de problemas.

4) Utilizando ruletas, dados, bolas de diferentes colores, urnas u otros materiales, ¿cómo se pueden realizar sorteos entre dos personas equivalentes al lanzamiento de una moneda?.

5) ¿Qué urnas son equivalentes a las siguientes ruletas?

- **<u>ENTRE PERSONAS</u>**

a) ¿Cómo se puede efectuar un sorteo entre 2, 3, 4, ... , n personas, de forma que todas ellas tengan las mismas posibilidades de salir elegidas?. ¿Qué dados o ruletas serían los más adecuados en cada caso?



b) ¿Cómo sortearías un premio entre 40 personas?. ¿Y cinco premios distintos entre las mismas personas?.

c) ¿Cómo se puede efectuar un sorteo entre 3 personas, teniendo una de ellas el doble de posibilidades que las otras dos?.

- **<u>SORTEO DE UN TRABAJO</u>**

Cuatro amigas van a realizar un trabajo para el que sólo se admite que consten legalmente tres personas. Para decidir quién será la que no conste, acuerdan realizar un sorteo:

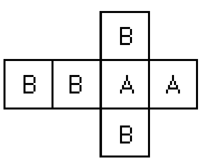
"Cada una elige un papelito, por turno, de entre cuatro, aparentemente iguales. Sin embargo, uno es más largo que los otros tres, que sí son iguales. Quedará sin constar la que elija el más largo".

Se entabla una discusión sobre el orden de extracción. Una piensa que la primera tiene más ventaja, porque tiene más posibilidades de elegir; pero otra piensa que la última está en desventaja, porque va obligada, para ella ya no hay azar; otra que no importa el orden...

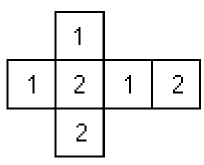
¿Qué piensas tú?.

- **<u>RULETAS Y DADOS</u>**

1) ¿Qué urna es equivalente a este dado?

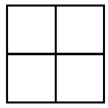


2) ¿Qué ruleta es equivalente a este dado?.



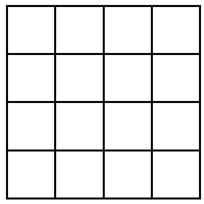
6. Modelización geométrica de probabilidades

- **LLUVIA ALEATORIA**



¿Cómo elegirías al azar una casilla de la trama 2 × 2 ?.

Pon un punto en la casilla elegida. Si realizas este proceso 100 veces, ¿cuántos puntos esperas que correspondan a cada casilla?. Repite la simulación 100 veces y comprueba tu conjetura.

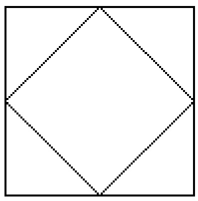


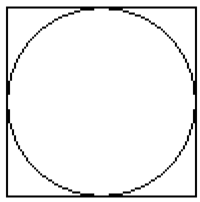
Si la trama consta de más cuadrados y sorteas entre ellos 100 puntos, ¿cuántos esperas que correspondan a cada uno de ellos?.

¿Y en tres cuadrados de esta trama?.

Si tuvieras que apostar por tres de ellos, ¿por cuáles apostarías?.

Al sortear 100 puntos en esta figura, ¿qué proporción de puntos crees que corresponderá al cuadrado inscrito?.



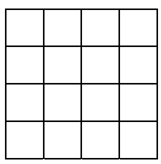


Si tuvieras que sortear puntos en esta figura, decidir qué puntos caen dentro del círculo y qué puntos caen fuera de él no es tan fácil. ¿Cómo lo harías?. Si sortemos 100 puntos, ¿cómo crees que se repartirán?.

- **TABLERO (*)**

En una feria, una caseta ofrece el siguiente juego:

Sobre un tablero 4 × 4 de cuadrados de 4 cm de lado, se lanza una ficha de 3 cm de diámetro. Se ganan 10 euros si la ficha queda en el interior de uno de los cuadrados y se pierde en caso contrario. Cada partida cuesta 1 euro.



a) ¿Qué probabilidad hay de ganar en una partida?.

b) ¿Es justo el juego?. ¿Cómo habría que modificarlo para que lo fuese?.

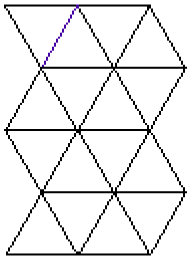
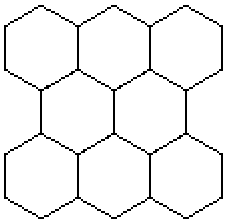
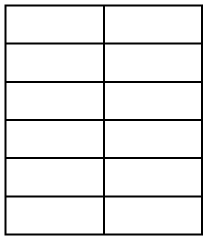
c) Juega con tus compañeros de grupo 30 partidas anotando los resultados. Recoge la información obtenida en tu clase en una tabla de recuento y halla la ganancia media.

d) Modifica las apuestas para que el juego sea justo.

e) Modifica el tamaño de la ficha para que el juego sea justo.

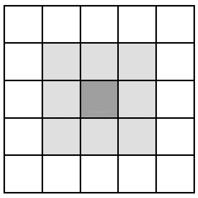
f) Modifica el tamaño del tablero para que el juego sea justo.

g) Investiga qué ocurre si se utilizan tableros con casillas hexagonales, triangulares o rectangulares.

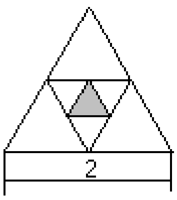
- **<u>DIANA</u>**

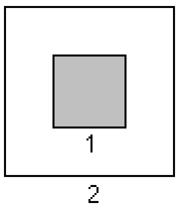
Lanzamos dardos al azar sobre la diana de la figura adjunta. Utilizando la tabla de números aleatorios, simula 50 lanzamientos. ¿Cuántos dardos esperas que caigan en cada una de las tres zonas indicadas?.

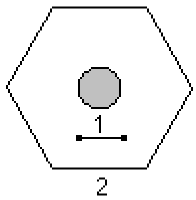


- **<u>MÁS DIANAS</u>**

Imagina que lanzamos un dardo sobre cada una de las dianas de la siguiente figura. ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo quede en la zona coloreada de cada diana?.

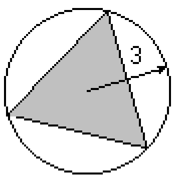






- **<u>OTRA DIANA</u>**

Lanzamos un dardo sobre esta diana. ¿Cuál es la probabilidad de acertar en la zona coloreada?.

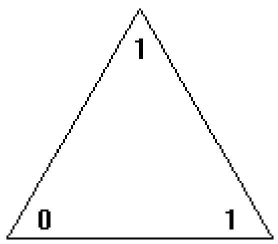


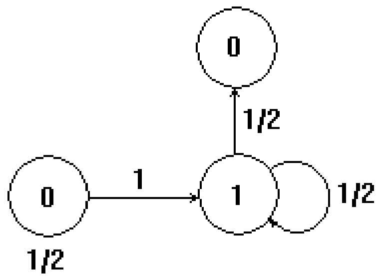
GRAFOS Y PROCESOS ALEATORIOS EN ESO Y BACHILLERATO

Introducción

La simulación de procesos aleatorios hace accesible a los alumnos problemas cuyo tratamiento formal o teórico en clase es muy difícil o inadecuado. Esto ocurre sobre todo en procesos que dependen del tiempo y cuya conclusión puede teóricamente requerir un intervalo temporal infinito (procesos estocásticos discretos). La simulación mediante sorteos y un tratamiento estadístico posterior permite tomar decisiones ante este tipo de problemas.

Para efectuar simulaciones de un proceso aleatorio, se puede llegar a resumir las diversas situaciones mediante grafos en los que cada estado se caracteriza por su distancia al origen. Entre cada dos estados se dibuja una flecha con una fracción que indica el número de caminos que conducen de un estado a otro respecto de los caminos posibles (probabilidades de transición).





Una vez construido el grafo, situamos tantas fichas en la salida (inicio) como sean necesarias para que en el primer paso puedan saltar a los estados de transición del nivel 1. Cada ficha pasará al siguiente nodo del grafo según su probabilidad de transición. Con este procedimiento, conocido como "ábaco probabilístico" es posible simular procesos aleatorios complejos, calcular la probabilidad de que el sistema se encuentre en un determinado estado transcurrido un intervalo de tiempo, determinar tiempos de espera, etc.

El proceso de resolución en este tipo de actividades, una vez obtenido el grafo, es el siguiente:

1) Búsqueda de procedimientos de simulación.

2) Realización de la simulación y recogida de los datos obtenidos en clase.

3) Recuento y construcción de la tabla de frecuencias correspondiente a los datos de la clase.

4) Análisis estadístico: ¿cuál es el valor más frecuente?, ¿cuál es el valor promedio experimental?, ¿qué diferencia hay entre el menor y el mayor dato?, ¿qué parámetro estadístico es más adecuado para resolver el problema?.

En las siguientes páginas se muestran algunos ejemplos de actividades experimentadas en segundo ciclo de ESO y primer curso de Bachillerato.

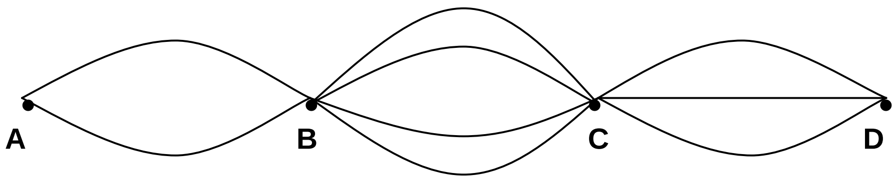
1. Árboles y caminos.

- **RESTAURANTE**

En un restaurante nos ofrecen elegir un primer plato, un segundo y un postre entre los dos primeros, tres segundos y cuatro postres que entran en el menú del día. ¿Cuántas comidas diferentes podemos hacer?.

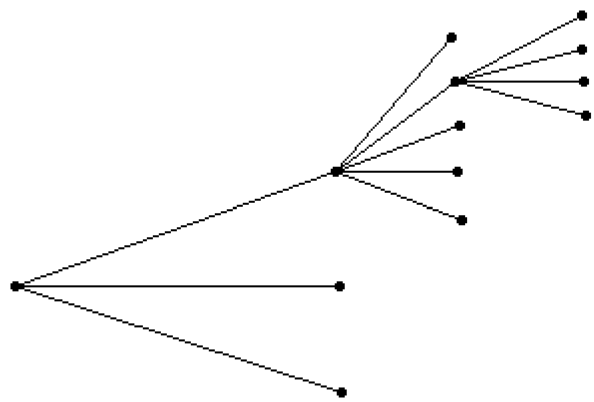
- **CAMINOS**

a) ¿Cuántos caminos hay desde A hasta D?.



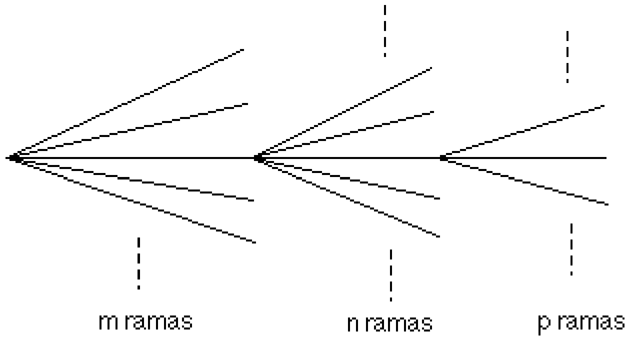
b) ¿Hay alguna relación entre este número de caminos y el número de caminos que van de A a B, de B a C y de C a D?.

Para efectuar conteos suele ser de gran utilidad construir un diagrama de árbol, en el que se muestran todas las posibilidades. En un diagrama de árbol distinguimos nudos y ramas. Si el diagrama es simétrico, el número de ramas del árbol es el producto de las ramas que salen en cada nudo.



Así, por ejemplo en este diagrama, si de todos los nudos del mismo orden sale el mismo número de ramas, el número total de ellas es de $3 \times 5 \times 4 = 60$.

c) ¿Cuántas ramas tiene este árbol ?.



En ocasiones se construyen diagramas de árbol en cuyas ramas se hacen constar las probabilidades de transición entre los nudos. En estos diagramas de árbol se cumplen las siguientes propiedades:

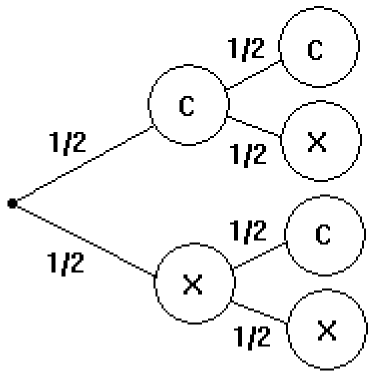
1) *La probabilidad de un camino dado es igual al producto de todas las probabilidades a lo largo de dicho camino.*

2) *La suma de las probabilidades* p_i *de las ramas que parten de un mismo nudo es igual a la unidad.*

3) *La probabilidad de alcanzar un nivel es igual a la suma de las probabilidades de todos los caminos que conducen a ese nivel.*

Ejemplo.– Calcula la probabilidad de que al lanzar dos monedas obtengamos exactamente una cara.

El diagrama de árbol correspondiente a este proceso aleatorio es el siguiente:



Entonces, la probabilidad de obtener CX es: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ *(por la propiedad 1).*

La probabilidad de obtener sólo una cara es: $p(CX)+p(XC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ *(por la propiedad 3). Además, si nos fijamos en el primer nudo, se cumple* $p(C)+p(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. *Y lo mismo en todos los nudos (propiedad 2).*

- **CESTA DE NAVIDAD**

Para confeccionar una cesta de Navidad voy a meter una pastilla de turrón, una botella de licor y una botella de champán. Puedo elegir entre 5 marcas de turrón, 4 licores distintos y 3 marcas de champán. ¿Cuántas cestas puedo confeccionar?.

- **ENCUENTRO DE TENIS**

a) Dos jugadores de tenis van a disputar un encuentro particular: quien gane primero 2 sets es el ganador del encuentro. ¿Cuál es el número máximo de sets que tienen que disputar?. ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?.

b) Resuelve el mismo problema si se impone la condición de que gane el torneo el primero que consiga vencer en dos sets consecutivos.

- **<u>CROMOSOMAS Y HERENCIA</u> (*)**

Cada célula reproductora del ser humano tiene 24 parejas de cromosomas. Cada pareja de cromosomas, responsable de una característica hereditaria determinada, se forma con un cromosoma del padre y el otro de la madre, responsable de la misma característica. Por ejemplo, la pareja de cromosomas responsable del color de los ojos se forma con un cromosoma de color de ojos del padre y otro de color de ojos de la madre.

a) ¿Cuántos hijos diferentes podría tener una pareja?.

b) Suponiendo que pudieran tener un hijo distinto cada año, ¿cuántos años necesitarían vivir para poder engendrarlos a todos?.

2. Paseos aleatorios. Tiempo de espera.

- **<u>SALE SEIS</u>**

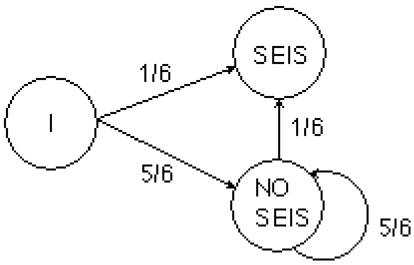
Se tira un dado hasta que sale un seis. ¿Cuántas tiradas se necesitan, por término medio, para que vuelva a salir otro seis?.

a) Efectúa lanzamientos reales de un dado cúbico (o simúlalos con una tabla de números aleatorios o una calculadora), anotando en cada caso el número de tiradas necesarias para que salga 6. Repite la experiencia 20 veces.

b) Recoge la información obtenida en tu clase mediante una tabla de recuento. Dibuja el histograma correspondiente. Calcula la media, moda y desviación típica. ¿Es representativa la media?. ¿Qué conclusiones puedes extraer?.

Partiendo del estado inicial I, si sale un 6 la experiencia finaliza, es un estado final, y $1/6$ *es la probabilidad de transición; si sale un resultado distinto de 6, probabilidad de transición* $5/6$*, hay que continuar lanzando y pueden ocurrir dos cosas:*

- ✓ *Obtener un 6, se llega al estado final y la probabilidad de transición de que esto ocurra es* $1/6$.
- ✓ *No obtener un 6, probabilidad de transición* $5/6$*, con lo que se vuelve a la misma situación y se debe continuar lanzando el dado. En este estado aparece un bucle, ya que puede repetirse una y otra vez.*



Si colocas una ficha en el estado I, no puedes decidir a qué estado (seis, no seis) pasa sin lanzar una vez el dado. Pero si colocas 6 fichas en I, es decir, empiezas el recorrido con 6 fichas, tras seis tiradas del dado por término medio, una de ellas pasará el estado seis y las 5 restantes al estado no seis.

La ficha que ha alcanzado el estado seis ya no se mueve, pero para poder mover las 5 fichas del estado no seis necesitamos que entre una ficha más. La única forma de conseguir esto es volviendo a introducir en el estado inicial I otras 6 fichas y repitiendo el recorrido según las probabilidades de transición.

Continua el proceso y recoge los resultados en una tabla como la siguiente:

Nº FICHAS EN ESTADO INICIAL	**Nº DE TIRADAS**	**ESTADO INTERMEDIO (NO SEIS)**	**ESTADO FINAL (SEIS)**
6	6	5	1

a) ¿Cuántas tiradas han sido necesarias, por término medio, para que las seis fichas iniciales pasen al estado final?.

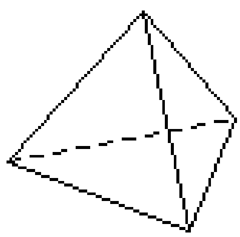
b) ¿Cuántas tiradas serán necesarias, por término medio, para que una ficha pase al estado final?.

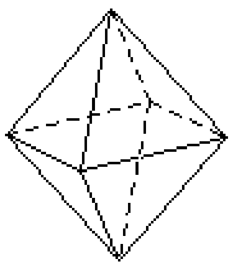
c) ¿Cuántos lanzamientos del dado serán necesarios, por término medio, para que salga un seis?.

- **<u>DADOS POLIÉDRICOS</u>**

a) ¿Cuántas veces hay que lanzar, por término medio, un dado tetraédrico para obtener un 4 ?.

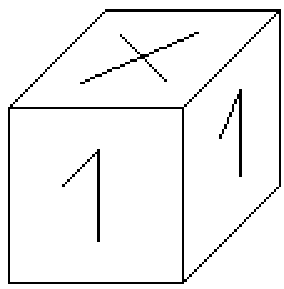
b) ¿Cuántas veces hay que lanzar, por término medio, un dado octaédrico para obtener un 8 ?.





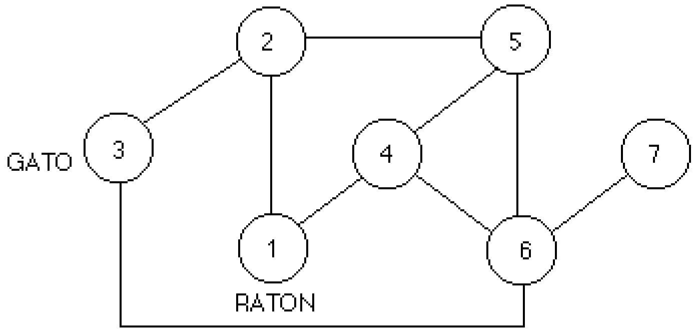
- **<u>QUINIELAS</u>**

¿Cuántas veces hay que lanzar, por término medio, un dado de hacer quinielas para obtener una X ?. Recuerda que un dado de este tipo tiene tres caras marcadas con 1, dos caras con X y una cara con 2.



- **EL RATÓN Y EL QUESO**

Observa el laberinto que representa el siguiente grafo. Tiene una entrada y dos salidas: una guardada por un gato y otra en la que hay un trozo de queso. Un ratón está en la entrada y avanza por el laberinto. En cada cruce elige al azar uno de los dos caminos posibles. Si llega al queso, sale del laberinto relamiéndose, pero si tropieza con el gato, está irremisiblemente perdido, el gato será el que se relama y se atuse los bigotes. ¿Cuál es la probabilidad de que salga del laberinto con vida y bien alimentado?. ¿Y de que se lo coma el gato?.



Buscando su destino, el ratón puede ir por muchos caminos distintos: ¿requieren todos el mismo tiempo para recorrerlos?. ¿Cuánto tiempo le costará al ratón acabar, bien o mal, su paseo por el laberinto, si tarda un minuto en recorrer la distancia que separa dos nudos consecutivos?.

- **APUESTAS (*)**

Dos jugadores A y B con 3 y 2 fichas respectivamente.

Se lanza un dado cúbico (o moneda); si sale par (cara), el jugador A paga una ficha a B y si sale impar (cruz), B paga una ficha a A. El juego acaba cuando uno de los jugadores se queda sin fichas.

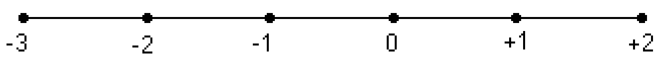
a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane A?. ¿Y de que gane B?.

b) Si cada lanzamiento tarda un minuto, ¿cuánto durará por término medio la partida?.

c) Juega con tu compañero 20 partidas, anotando los resultados. Recoge la información de tu clase en una tabla como la siguiente y extrae conclusiones.

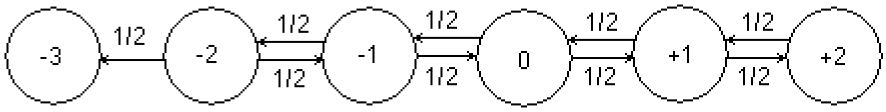
	GANA A	GANA B	Nº TIRADAS
Grupo 1			
Grupo 2			
Grupo 3			
Total			

Puedes simular este juego mediante un paseo aleatorio sobre el siguiente segmento:



El estado inicial es 0 (que, a su vez, es un estado intermedio) y en cada punto se desplaza al azar una unidad a la izquierda o a la derecha. Los estados +1 y +2 representan el número de fichas que ha perdido el jugador B; por tanto es un estado final, absorbente, el paseo finaliza y gana A. Los estados negativos indican el número de fichas perdidas por A, de forma que –3 es otro estado absorbente, en el que gana el juego B.

El grafo correspondiente a este paseo aleatorio es el siguiente:



Simula el juego con fichas y completa la siguiente tabla:

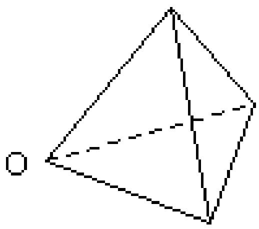
Nº FICHAS QUE INICIAN EL PASEO	**ESTADOS INTERMEDIOS**				**ESTADOS FINALES**		**Nº PASOS**
	0	**+1**	**–1**	**–2**	**+2**	**–3**	
2	2	0	0	0	0	0	0
–	0	1	1	0	0	0	2

Analiza los resultados de la tabla:

- ✓ ¿Cuántas fichas han iniciado el paseo y lo han finalizado?.
- ✓ De ellas, ¿cuántas han llegado al estado +2 y cuántas al estado –3 ?.
- ✓ ¿Qué probabilidad tiene A de ganar?. ¿Y el jugador B?.
- ✓ ¿Cuántos pasos son necesarios para que todas las fichas que han iniciado el paseo lo finalicen?.
- ✓ ¿Cuál es el número medio de lanzamientos necesario para que termine el juego?.
- ✓ ¿Cuánto durará por término medio cada partida?.

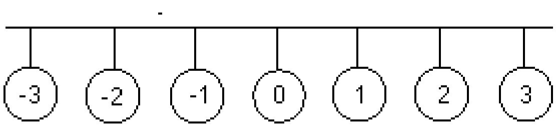
- **<u>PASEO DE LA HORMIGA</u>**

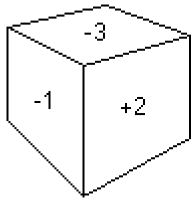
Una hormiga realiza un paseo aleatorio sobre las aristas de un tetraedro (en cada vértice elige al azar una de las aristas concurrentes). Si empieza el paseo en el vértice O, ¿cuánto tardará por término medio en volver al punto de partida?.



- **<u>PASEOS ALEATORIOS</u>**

Con varios dados como el de la figura, con números enteros en sus caras, puedes simular paseos aleatorios.

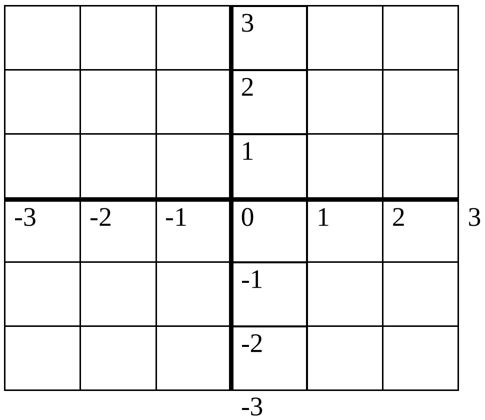




a) Disponemos de una recta graduada y colocamos una ficha en el origen. Dependiendo de los resultados del lanzamiento del dado, desplazamos la ficha un cierto número de lugares, en un sentido u otro. Si sale resultado positivo, hacia la derecha; si negativo, a la izquierda.

✓ ¿Hay muchas posibilidades de llegar al punto 3 por este método?. ¿Y de llegar al –3 ?.

✓ ¿Cuántos lanzamientos habrá que efectuar, por término medio, para volver al origen?.



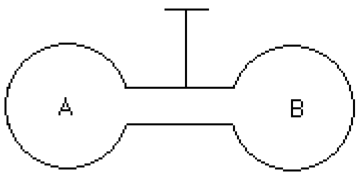
b) Tomando como origen el punto O, en el cual colocamos la ficha de salida, podemos combinar dos escalas, una vertical y otra horizontal, análogas a las anteriores. Ahora lanzamos dos dados (uno para abcisas y otro para ordenadas), o bien un mismo dado dos veces consecutivas, y desplazamos la ficha según los resultados obtenidos.

✓ ¿Cuál será la distancia media de la ficha al origen después de 6 tiradas?.

✓ ¿Es fácil o difícil que vuelva la ficha al origen?.

- **<u>GAS</u>**

Supón que en un recipiente A hay un gas, bastante raro, con sólo tres moléculas. Estas moléculas pueden pasar al recipiente B a través de un agujero. Simularemos este movimiento del siguiente modo: Cada segundo se sortea al azar uno de los números 1, 2, 3. La bola cuyo número ha salido en el sorteo cambia de recipiente.



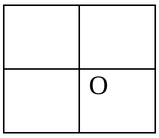
Describe los estados posibles del sistema (bolas – gas), si sólo nos interesa el número de bolas que hay en los recipientes. ¿Qué estados crees que van a aparecer con más frecuencia a lo largo del tiempo?. Efectúa al menos 60 simulaciones y concluye:

- ✓ ¿Qué estado es más frecuente?.

- ✓ ¿Qué tiempo hay que esperar para que, saliendo de dicho estado, retorne a él ?.

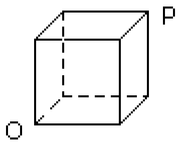
- **PASEO DEL ESCARABAJO**

Un escarabajo parte del centro O del cuadrado de la siguiente figura. Invierte 1 segundo en recorrer cualquiera de los doce pequeños segmentos. Se para cuando vuelve al punto O. ¿Cuánto tardará, por término medio, en volver a O?.



- **PASEO POR UN CUBO**

Una hormiga se pasea por las aristas de un cubo de alambre como el de la figura, partiendo del punto O. En cada vértice elige al azar uno de los tres caminos que parten de él. Al llegar al punto P un pájaro, que la estaba esperando con ansia, se la come. ¿Cuánto tiempo estará la hormiga paseándose por el cubo, por término medio, si le cuesta un minuto recorrer cada arista?.



3. Construcción de grafos.

- ***Estados y transiciones***

Un proceso estocástico recorre en el tiempo una sucesión de estados. El conjunto S de todos los posibles estados se llama espacio de estados. Los estados están representados por una variable continua y las transiciones de un estado al siguiente se pueden producir en todo momento, pero para determinar parámetros estadísticos es necesario discretizar el proceso, de forma que el sistema tenga una cantidad finita o infinita numerable de estados y el tiempo se mida en un conjunto finito o infinito numerable de instantes.

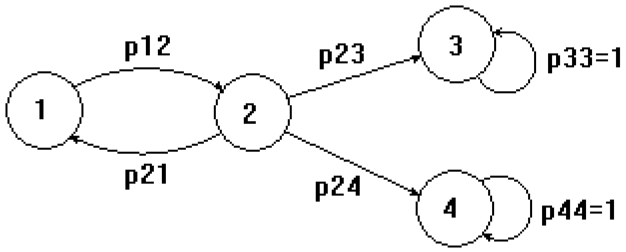
Los procesos estocásticos se representan por medio de sus correspondientes grafos y los estados posibles por un pequeño círculo en cuyo interior se sitúa el nombre del estado. Si es posible una transición del estado i al estado k, se traza una flecha desde i hasta k, acompañada de la probabilidad de transición p_{ik}. *Las probabilidades de transición cumplen las siguientes propiedades:*

$$(1)\ 0 \le p_{ik} \le 1 \qquad\qquad (2) \sum p_{ik} = 1$$

La propiedad (2) indica que la suma de las probabilidades de todas las flechas que parten de un estado es igual a 1.

Un proceso estocástico está completamente determinado si se conoce además de las probabilidades de transición p_{ik} *, el estado inicial en que se encuentra el sistema.*

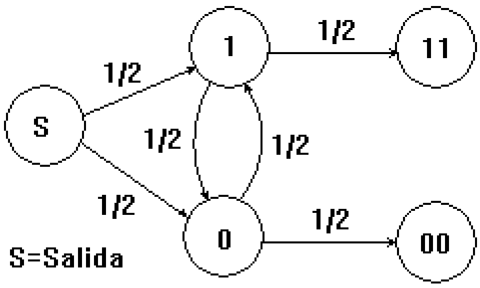
La siguiente figura muestra el grafo de un proceso aleatorio. Estados finales como 3 y 4 se llaman absorbentes. En general, un estado i es absorbente cuando $p_{ii} = 1$*. Al conjunto R={3, 4} de los estados absorbentes se le llama borde de S. Evidentemente, puede ocurrir que R sea el conjunto vacío.*



Los estados de S que no pertenecen a R se llaman estados interiores. En el ejemplo anterior, los estados 1 y 2 son interiores.

Un proceso estocástico se puede representar mediante recorridos en un grafo.

Ejemplo.–** **Lanzamos una moneda de caras 0 y 1 tantas veces como sea necesario, hasta obtener una de las palabras 11 ó 00. Construye el grafo correspondiente a este proceso aleatorio.



- ***Reglas de los caminos***

4) *La probabilidad de un camino dado es igual al producto de todas las probabilidades a lo largo de dicho camino.*

5) *La probabilidad* p_i *de alcanzar un subconjunto T del borde R a partir de i es igual a la suma de las probabilidades de todos los caminos que conducen desde i hasta T.*

6) *La duración media* $\overline{X_i}$ *esperada de un recorrido aleatorio desde un estado i hasta R es la media ponderada de las longitudes de todos los caminos de i a R. La longitud* X_k *de cada camino está ponderada por su probabilidad* q_k*, es decir:*

$$\overline{X_i} = \sum_k X_k \cdot p_k$$

Estas reglas son aplicables a aquellos grafos que son diagramas de árbol.

- ***Reglas del valor medio***

Supongamos un proceso aleatorio absorbente con un espacio de estados S={1, 2, …, n}. Nos interesa la probabilidad de que la absorción se produzca en un subconjunto determinado T del borde R y la duración media del recorrido hasta dicha absorción. En general, T está formado por un único estado absorbente.

Sea p_i *= probabilidad de que, partiendo de i, la absorción tenga lugar en T⊂R.*
m_i *= duración media del recorrido desde i hasta la absorción en R.*

Entonces se cumple:

(1) $p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p_k$ *para los estados interiores.*

(2) $p_i = 1$ *para todos los estados de T,* $p_i = 0$ *para los estados de R que no están en T.*

(3) $m_i = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot m_k$ *para todos los estados interiores.*

(4) $m_i = 0$ *para todos los estados del borde R.*

La propiedad (1) se puede formular de la siguiente forma:

- ***Primera regla del valor medio***

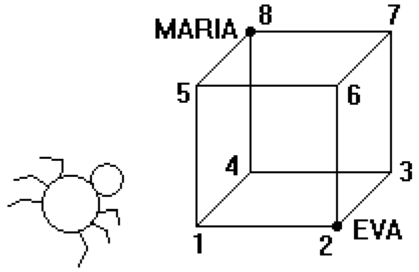
La probabilidad de un estado interior es igual a la media ponderada de las probabilidades de sus estados vecinos.

La propiedad (3) se puede formular de la siguiente forma:

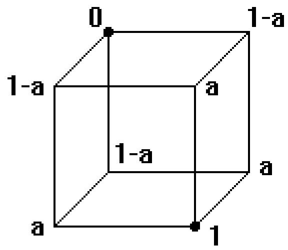
- ***Segunda regla del valor medio***

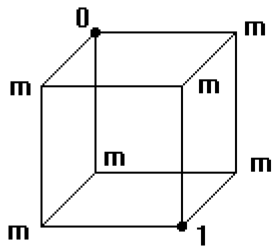
El valor de espera de un estado interior es igual a la unidad más la media ponderada de los valores de espera de sus estados vecinos.

Ejemplo.– El escarabajo de la siguiente figura se desplaza sobre las aristas del cubo de forma que en cada vértice elige al azar uno cualquiera de los tres caminos posibles. Si consigue llegar a 2 antes que a 8, gana Eva. En caso contrario gana María. Calcula la probabilidad de que gane Eva y la duración media del juego.



Cuando el escarabajo parte de i, la probabilidad de que gane Eva es p_1. *Los valores correspondientes al borde son* $p_2 = 1$ *y* $p_8 = 0$. *Por consideraciones de simetría se tiene* $p_1 = p_3 = p_6 = a$.





Los vértices 4, 5 y 7 son tan buenos para Maria como los 1, 3 y 6 para Eva. Así, pues, la probabilidad de que María gane a partir de 4, 5 y 7 es a y la de que gane Eva es 1–a.

Se elige un punto interior, por ejemplo, el vértice 5. De acuerdo con la primera regla del valor medio:

$$1 - a = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a \to a = \frac{3}{5}$$

Sea m la duración media del juego a partir del vértice i. Los valores correspondientes al borde son $m_2 = m_8 = 0$. *Por razones de simetría resulta, para los restantes vértices:*

$$m_1 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m$$

La segunda regla del valor medio proporciona: $m = 1 + \frac{1}{3} \cdot (0 + m + m) \to m = 3$

La probabilidad de que Eva gane el juego es $\frac{3}{5}$ *y el juego tiene una duración media de 3 unidades de tiempo.*

a) Lanzamos una moneda de caras 0 y 1 hasta que se obtenga la palabra 1111 por primera vez. Construye el grafo de este proceso aleatorio y calcula el tiempo medio de espera.

b) Lanzamos una moneda de caras 0 y 1 hasta que se obtenga la palabra 0011 por primera vez. Construye el grafo de este proceso aleatorio y calcula el tiempo medio de espera.

c) Eva dice a María: "Vamos a lanzar una moneda de caras 0 y 1 tantas veces como sea necesario, hasta obtener una de las palabras 1111 ó 0011. Tú ganas si sale primero 1111. En caso contrario gano yo". Construye el grafo de este proceso aleatorio. ¿Es un juego equitativo?.