

TALLER: GEOMETRÍA Y ESTADÍSTICA CON LA CLASSPAD 300

MAURICIO CONTRERAS DEL RINCÓN
I.E.S. BENICALAP
VALENCIA

1. Introducción

La ClassPad 300 de Casio es una herramienta educativa y matemática de última generación, que cuenta con un gran número de prestaciones y ventajas. Sus cualidades la hacen un híbrido entre calculadora gráfica–algebraica, ordenador de bolsillo y PDA con lápiz táctil interactivo.


Con la ClassPad es muy fácil resolver problemas sobre construcción de polígonos, cónicas y lugares geométricos. También resulta muy sencillo obtener gráficos y parámetros estadísticos. Gracias a esta tecnología es posible trabajar contenidos de Estadística Matemática, que hasta ahora han permanecido fuera de las aulas. Con este taller se pretende estudiar el manejo de esta calculadora y su utilidad para el tratamiento de algunos contenidos de Geometría y Estadística en ESO y Bachillerato.





El taller está dividido en tres partes:

- 1) Operaciones básicas con la calculadora gráfica ClassPad 300:
- 2) Geometría dinámica e interactiva:
- 3) Descripción de datos, probabilidad e inferencia estadística:

2. Operaciones básicas con la calculadora gráfica ClassPad 300

• ENTRADA DE DATOS

Para introducir datos en la ClassPad se utiliza el teclado virtual. Si éste no aparece en pantalla, pulsa la tecla [KEYBOARD], o toca el menú  y luego toca [Keyboard]. De esta manera aparece el teclado virtual. Al pulsar de nuevo la tecla [KEYBOARD] se oculta el teclado virtual. Existen cuatro estilos diferentes de teclado virtual, tal como se describe a continuación.

<ul style="list-style-type: none">• Teclado matemático (mth) 	Permite introducir valores, variables y expresiones. Contiene teclados adicionales en los botones inferiores como [TRIG] y [CALC].
<ul style="list-style-type: none">• Teclado alfabético (abc) 	Permite introducir caracteres alfabéticos, caracteres griegos y otros caracteres, así como símbolos lógicos y otros símbolos numéricos. Contiene teclados adicionales en los botones de la parte inferior, como [$\alpha\beta\gamma$] y [MATH].
<ul style="list-style-type: none">• Teclado de catálogo (cat) 	Muestra una lista desplegable que permite introducir funciones, comandos, variables del sistema y funciones definidas por el usuario. Seleccionando un elemento de la lista "Form", los comandos cambian.
<ul style="list-style-type: none">• Teclado 2D 	Muestra varias plantillas para la entrada directa de fracciones, valores exponenciales, matrices, expresiones de cálculo diferencial e integral, etc. La entrada directa no puede usarse en el cuadro de medidas geométricas o cuando se entren datos en una lista.

Para seleccionar un estilo de teclado virtual, basta tocar una de las lengüetas que hay a lo largo de la parte superior del teclado virtual ([mth], [abc], [cat] o [2D]).

- **Introducción de expresiones**

Para introducir una expresión basta utilizar el teclado virtual y pulsar la tecla [EXE] para ejecutarla. La ClassPad determina automáticamente la secuencia de prioridad de suma, resta, multiplicación, división y expresiones entre paréntesis. Antes de iniciar cualquier cálculo, es conveniente borrar la memoria de la ClassPad pulsando [CLEAR]. Para introducir el signo menos antes de un valor negativo, usa la tecla [(-)].

Ejemplo: Simplificar $2(5 + 4) \div (23 \times 5)$.

Utilizamos el teclado virtual: [CLEAR] [mth] [2] [(] [5] [+] [4] [)] [÷] [(] [2] [3] [×] [5] [)] [EXE].

$$\frac{2(5+4)}{(23 \times 5)} = \frac{18}{115}$$

- **El portapapeles**

Para copiar caracteres arrastra el lápiz táctil sobre los caracteres a copiar para seleccionarlos y, en el teclado virtual, toca . Los caracteres seleccionados se copian en el portapapeles.

$$y = 3x^2 + 5x - 8$$

Para cortar caracteres arrastra el lápiz táctil sobre dichos caracteres para seleccionarlos, y, en el teclado virtual, toca . Los caracteres seleccionados se mueven al portapapeles.

$$y = 3x^2 + 5x - 8$$

$$y = 3x^2 - 8$$

Para pegar el contenido del portapapeles mueve el cursor a la posición deseada y, en el teclado virtual, toca . El contenido del portapapeles pasa a la posición actual del cursor.

$$y = 3x^2 - 8$$

$$y + 5x = 3x^2 - 8$$

- **Variables de un solo carácter**

Para introducir un nombre de variable de un solo carácter toca cualquier tecla del conjunto de teclas [VAR] del teclado matemático (mth), o bien, toca cualquier tecla del conjunto de teclas [VAR] del teclado 2D. También puedes tocar las teclas [x], [y], [z] o [t] a la izquierda de la tecla 9 del teclado matemático (mth) o del teclado 2D, o puedes pulsar la tecla [x], [y] o [z] del teclado.

En una serie de caracteres, cada uno es considerado como una variable de un solo carácter. El resultado de insertar [a], [b] y [c], por ejemplo, se trata como la expresión matemática $a \times b \times c$ y no como los caracteres "abc".

Ejemplo 1: [mth] [VAR] [a] [b] [c] [EXE]

$$abc = a \cdot b \cdot c$$

Ejemplo 2: [2] [x] [y] [EXE]

$$2xy = 2 \cdot x \cdot y$$

Para introducir series de varios caracteres (tal como "list1") utiliza el teclado alfabético (abc)

Ejemplo: [abc] [a] [b] [c] [EXE]

$$abc = abc$$

También puedes utilizar el teclado alfabético (abc) para introducir nombres de variable de un solo carácter, combinados con operadores.



Ejemplo: [abc] [a] [×] [b] [+] [c] [EXE]

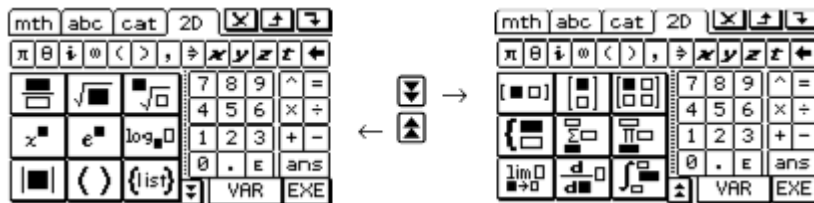
$$a \times b + c = a \cdot b + c$$

- **El teclado 2D**


Muestra diversas plantillas con las que puedes introducir fracciones, valores exponenciales, raíces enésimas, matrices, diferenciales, integrales y otras expresiones complejas. También permite introducir variables de un solo carácter mediante el conjunto de teclas [VAR].

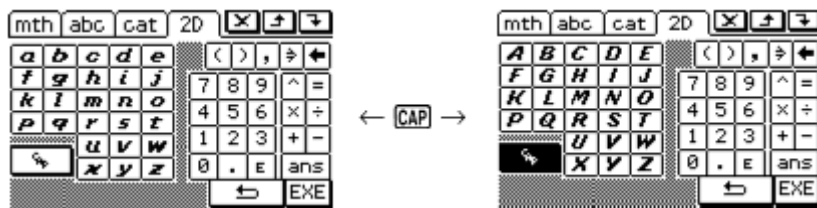
Conjunto inicial de teclas del teclado 2D

Este conjunto de teclas permite introducir expresiones matemáticas de manera sencilla. Toca las teclas  y  para desplazarse entre los menús de las plantillas disponibles.



Conjunto de teclas [VAR]

Al tocar la tecla [VAR] aparecen las teclas para introducir variables de un carácter, y la tecla virtual [VAR] se cambia por . Esta tecla permite alternar entre [VAR] y el teclado [2D]. Tocando la tecla [CAP] se cambia a la escritura en mayúsculas.



El teclado [VAR] solo permite introducir variables de un solo carácter. No se puede utilizar para introducir nombres de variable de varios caracteres, tales como “ab” o una serie de varios caracteres. Para ello, debes usar el teclado alfabético (abc).

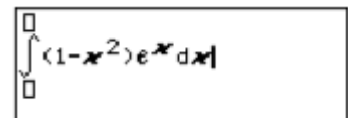
Ejemplo: Introduce $\int_0^1 (1-x^2) \cdot e^x \cdot dx$.

1. Toca [2D] para ver el teclado 2D y luego toca .

2. Toca . 

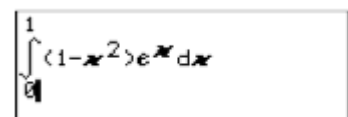
3. Introduce el trozo de expresión que va a la derecha de la integral.

[() [1] [-] [x]  [x^n] [2] [>] [()] [e^n] [x] [>] [>] [x]



O utiliza los símbolos matemáticos 2D para introducir la expresión.

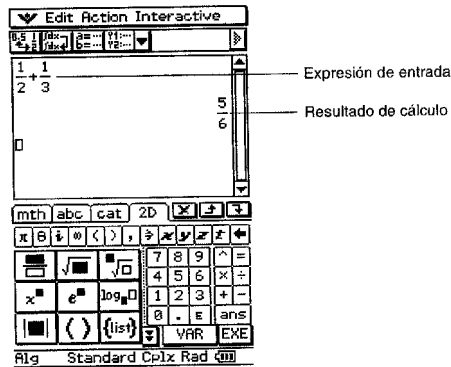
- Toca con el lápiz táctil para mover el cursor a los otros cuadros de entrada para introducir los límites de la integración. En el cuadro de entrada superior, toca [1]. En el cuadro de entrada inferior, toca [0].



- Cuando todo aparezca de la manera deseada, pulsa [EXE].

• **OPERACIONES CON FRACCIONES**

1. Introduce la siguiente secuencia de pulsaciones en la Classpad 300: [1] [+] [2] [+] [1] [+] [3] [EXE]. En pantalla aparece la suma de fracciones y su resultado:



2. Utiliza el teclado [2D] para introducir la siguiente expresión: $\frac{4}{5} - \frac{3}{7}$. Pulsa [EXE] y observa el resultado.

3. Utiliza el teclado [2D] para escribir la expresión: $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$. Pulsa [EXE] y observa el resultado.

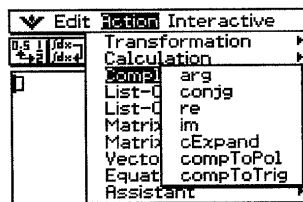
4. Con ayuda del teclado [2D] escribe la expresión: $\frac{4/9}{5/7}$. Pulsa [EXE] y observa el resultado.

Utiliza el teclado virtual y el lápiz táctil para efectuar las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{4}\right)$ c) $\left(\frac{7}{5} - \frac{1}{11}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} - 2\right)$ d) $\frac{\frac{11}{2} + \frac{13}{5}}{3 + \frac{3}{8}}$

• **NÚMEROS COMPLEJOS**

El menú Acción / Complejo contiene comandos que permiten hacer cálculos con números complejos:



1. Halla el argumento del complejo 2+i (en el modo de radianes). Para ello, utiliza el menú Acción / Complejo / arg.

2. Halla el conjugado del número complejo 1+i, usando el menú Acción / Complejo / conjg.

`conjg(1+i)` 1-i

3. Calcula la parte real del número complejo 3-4i, utilizando el menú Acción / Complejo / re.

`re(3-4i)` 3

4. Calcula la parte imaginaria del número complejo 3-4i, utilizando el menú Acción / Complejo / im.

`im(3-4i)` -4

5. Transforma el complejo 1+i en su forma polar, en el modo de radianes, usando Acción / Complejo / compToPol.

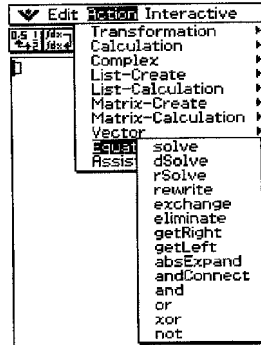
`compToPol(1+i)` $\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi \cdot i}{4}}$

6. Transforma el complejo 1+i en su forma trigonométrica, en el modo de radianes, usando Acción / Complejo / compToTrig.

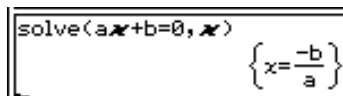
`compToTrig(1+i)` $\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot i \right)$

• **ECUACIONES Y SISTEMAS**

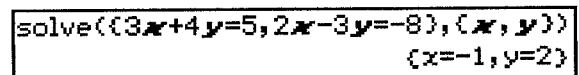
El menú Acción / Ecuación / Desigualdad contiene comandos relacionados con ecuaciones, desigualdades e inecuaciones.



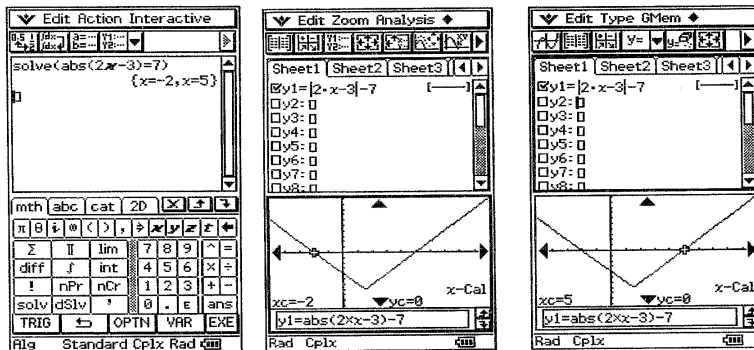
- Resuelve la ecuación $ax+b=0$ para la variable x .



- Resuelve el sistema de ecuaciones lineales simultáneas: $3x + 4y = 5, 2x - 3y = -8$.



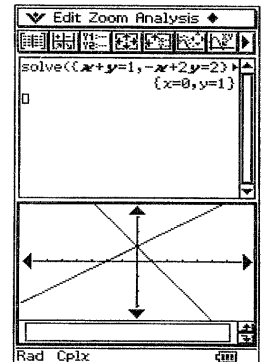
- 1) (Valor absoluto). Resuelve la ecuación: $|2x - 3| = 7$ utilizando el comando solve. Después, abre la ventana del editor de gráficos e introduce la función $y1 = |2x - 3| - 7$. Presiona en la casilla de selección correspondiente y en el botón para representarla gráficamente. Si es necesario, modifica las dimensiones de la pantalla de visualización con el comando / Preferencias / Ventana vis. Comprueba que las soluciones de la ecuación se corresponden con los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.



- 2) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$. Utiliza para ello el comando

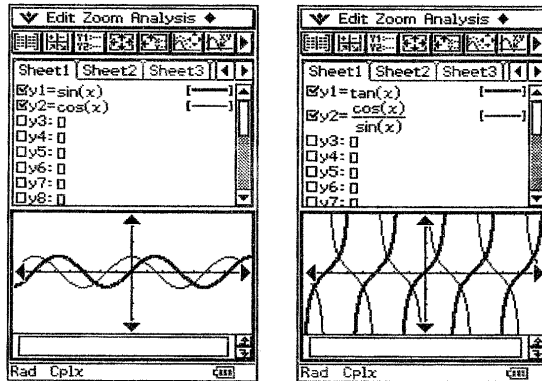
solve de la aplicación Principal. Posteriormente, comprueba geoméricamente el resultado. Para ello, en el editor de gráficos introduce las funciones $y1=-x+1, y2=(1/2)x+1$, activa sus casillas y represéntalas gráficamente tocando

el botón . Si es necesario modifica las dimensiones de la ventana gráfica con el menú / Preferencias / Ventana vis. Comprueba gráficamente que la solución es la obtenida con el comando solve. También podrías haber resuelto el sistema directamente usando el teclado 2D, tal como se muestra en la figura:



- **GRÁFICAS DE FUNCIONES**


- 1) Dibuja las gráficas de las funciones trigonométricas: $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = \tan(x)$, $y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

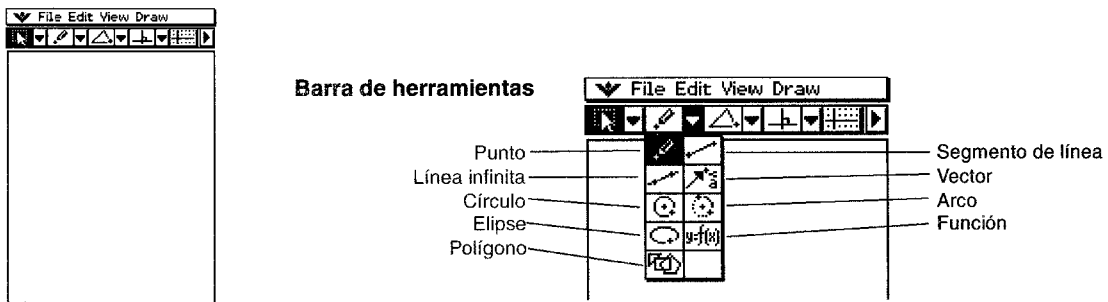


- 2) Representa gráficamente las funciones $Y_1 = 8 \cdot \sin x$ e $Y_2 = 8 \cdot \cos x$, utilizando trazos de distintos grosor.
- 3) Representa gráficamente las funciones $y = 2 \sin x$, $y = 4 \sin x$, $y = 6 \sin x$.
- 4) Representa gráficamente las funciones $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$.
- 5) Representa gráficamente las funciones $y = 2 \sin x$, $y = 4 \sin(2x)$, $y = 6 \sin(3x)$.

3. **Geometría dinámica e interactiva**

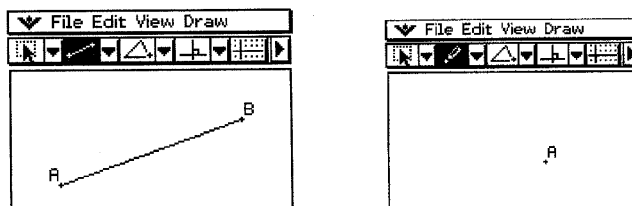
- **PASOS PREVIOS**

Con la ClassPad es muy fácil dibujar figuras geométricas. Para ello, pulsa en el botón Menú de la barra situada en la pantalla de la Classpad y toca el icono . De esta forma se inicia la aplicación Geometría. Puedes dibujar distintas figuras utilizando el menú Dibuj. Pero también puedes utilizar la barra de herramientas:



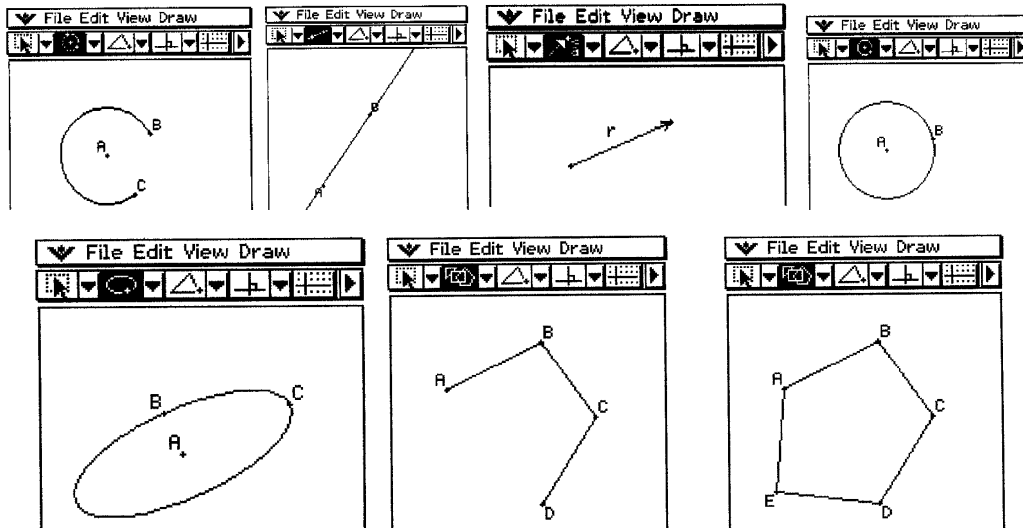
Para borrar la pantalla después de dibujar cada figura, usa el menú Edit / Borrar todo.

- 1) Dibuja un segmento. Toca en un punto de la pantalla para empezar el segmento de línea y se marcará un punto, y luego toca el punto donde quieres que acabe.

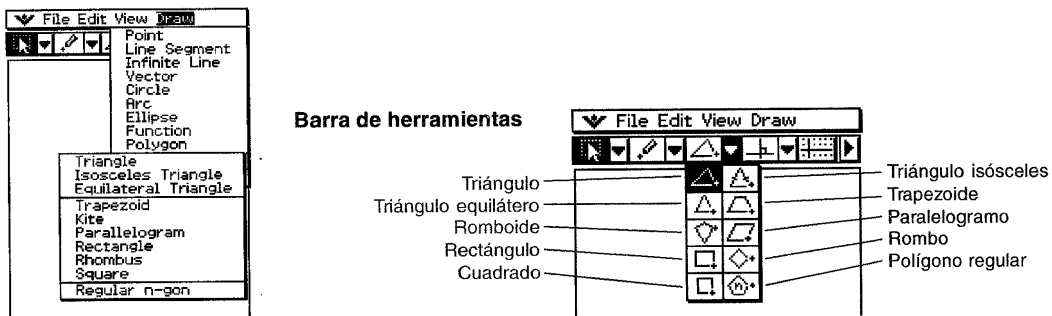


- 2) Dibuja un punto, seleccionando el comando Dibuj. / Punto. Se resalta el botón de punto en la barra de herramientas. Toca la posición de la pantalla donde quieres dibujar el punto.

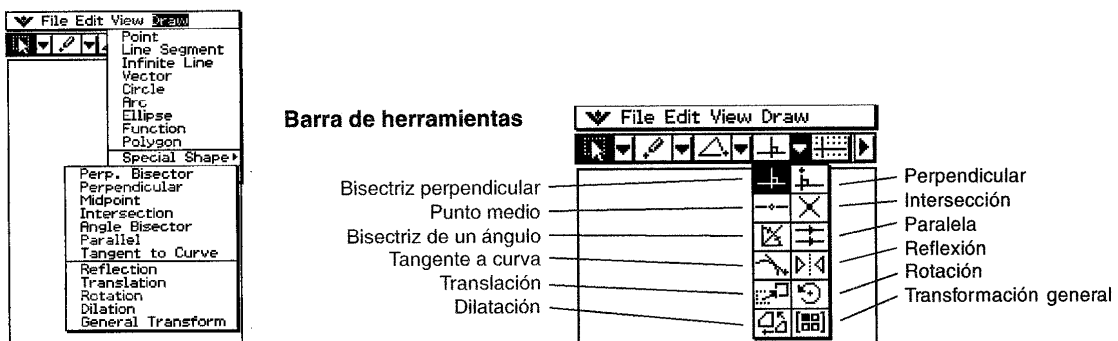
- 3) De forma similar, puedes dibujar otros elementos geométricos, como rectas, vectores, circunferencias, arcos de circunferencia, elipses y polígonos.



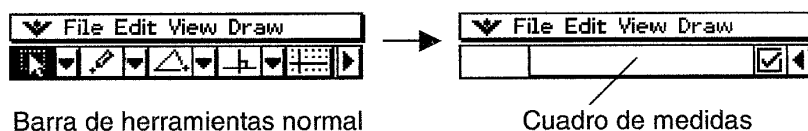
- 4) Pero además, con la ClassPad podemos dibujar algunas formas especiales, tales como triángulos, romboides, rectángulos, cuadrados, trapezoides, paralelogramos, rombos y polígonos regulares. Para ello, puedes usar el submenú Formas especiales o bien la barra de herramientas, tal como se muestra en la siguiente figura:



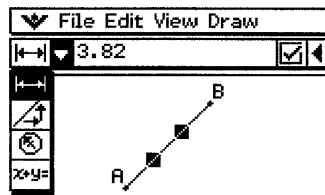
- 5) También puedes realizar construcciones geométricas, usando el submenú Construir o recurriendo a la barra de herramientas correspondiente. Así, puedes dibujar la mediatriz de un segmento, la recta perpendicular a un segmento o a una recta, el punto medio de un segmento, la bisectriz de un ángulo, etc. También puedes trasladar, reflejar, girar y dilatar figuras.



- 6) Por otra parte, la ClassPad 300 dispone también del llamado "cuadro de medidas" con el que es posible obtener distancias, perímetros, ángulos y áreas. Para que aparezca el cuadro de medidas, debes tocar el botón [>] de la barra de herramientas de la ventana Geometría. Basta tocar el botón [<] para regresar a la barra de herramientas normal.



El tipo de información que aparece en el cuadro de medidas depende de la figura seleccionada. Por ejemplo, si seleccionamos un segmento, podemos ver la distancia, pendiente, ángulo con el eje OX y la ecuación de la recta que lo contiene. Para indicar el tipo de medida a mostrar, toca el botón [▼] de la barra de herramientas y toca el icono deseado en la lista desplegable.

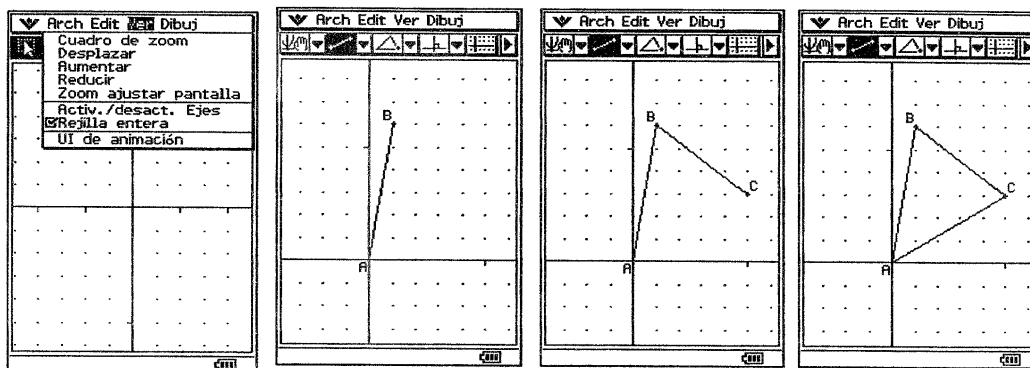


Ya estamos en condiciones de empezar el trabajo. Las actividades las hemos agrupado en tres grandes bloques: Construcciones, Animaciones y Geometría Analítica.

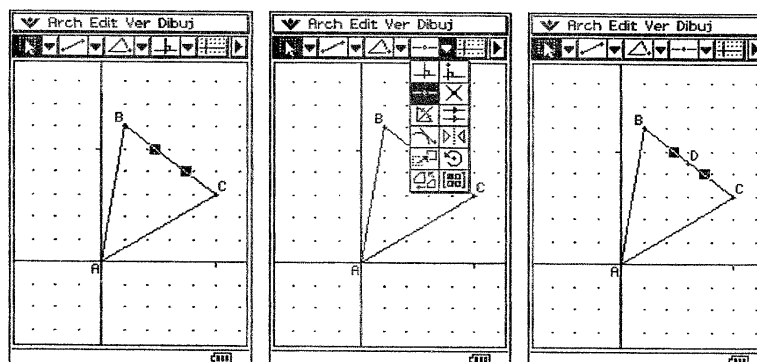
• CONSTRUCCIONES

1) Halla el baricentro del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 6)$ y $(5, 3)$. Sigue los siguientes pasos:

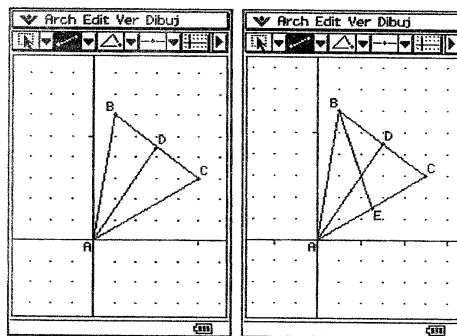
- Abre la ventana de Geometría y visualízala en el formato de rejilla entera.
- Con la herramienta Segmento, dibuja un segmento de extremos $(0, 0)$ y $(1, 6)$. Para ello, toca el origen de coordenadas y luego el punto de coordenadas $(1, 6)$.
- Utilizando la herramienta Segmento, dibuja el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 6)$ y $(5, 3)$.



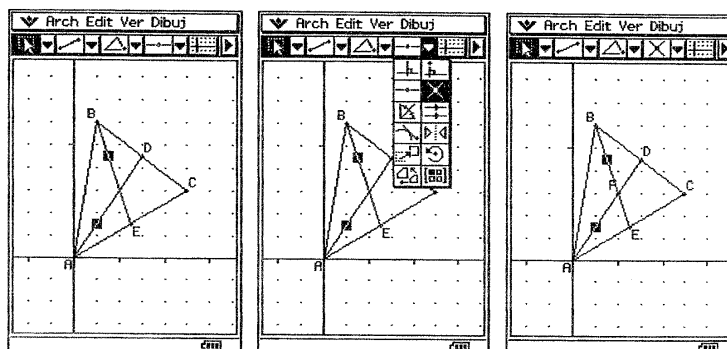
- Construye la mediana entre A y BC. Para ello, obtén primero el punto medio D del segmento BC, seleccionando el segmento y tocando el botón punto medio. A continuación, dibuja un segmento desde A hasta el punto D. Este segmento es la mediana.



- Repite el mismo proceso para construir la mediana entre B y el lado AC.

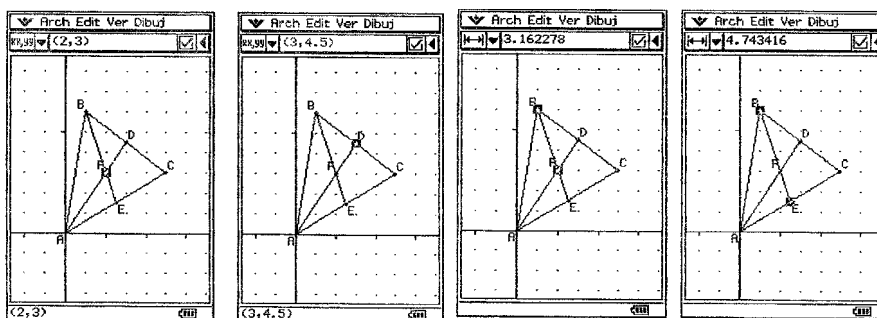


- Halla el punto de intersección de las dos medianas, seleccionando los segmentos y haciendo clic en el botón Intersección. El punto F de corte es el baricentro.

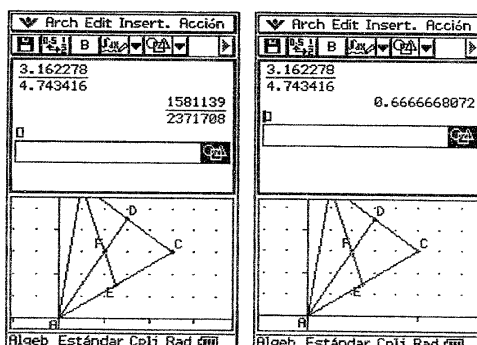


2) Comprueba en el triángulo de vértices (0, 0), (1, 6) y (5, 3) que la distancia del vértice al baricentro es igual a los 2/3 de la mediana.

- Halla las coordenadas del baricentro F, seleccionando el punto y abriendo el cuadro de diálogo de medidas tocando el botón [M]. Comprueba que las coordenadas de F son (2, 3). Selecciona el punto D y comprueba que sus coordenadas son (3, 4.5). Compara las distancias AF y AD.

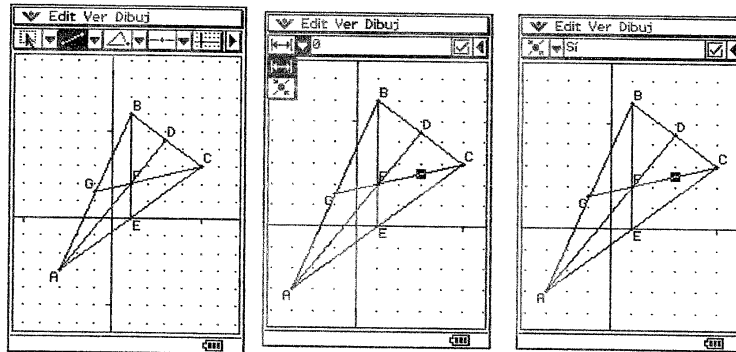


- Selecciona los puntos B y F y aparecerá la distancia BF en el cuadro de medidas. Selecciona los puntos B y E y observa la distancia BE en el cuadro de medidas. Averigua la relación entre dichas distancias y exprésala en forma decimal en la ventana Principal, tocando el botón $\frac{B}{E}$. Observa que $BF/BE = 2/3 = 0.6666667$.

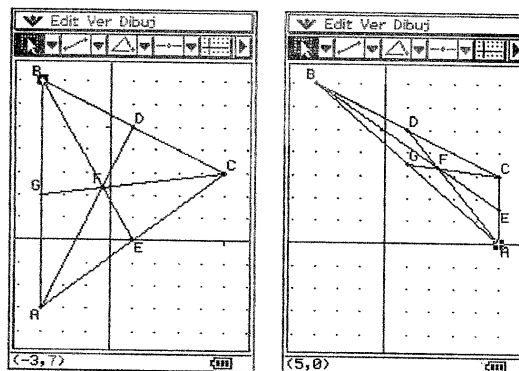


3) Comprueba que las tres medianas de un triángulo se cortan en el baricentro.

- En el triángulo ABC anterior, dibuja la mediana desde C al punto medio de AB, seleccionando AB, hallando su punto medio y dibujando un segmento desde el punto medio hasta C.
- Observa que la nueva mediana parece pasar por el baricentro F. ¿Será cierto?. Para comprobarlo, selecciona simultáneamente el punto F y la nueva mediana y observa que en el cuadro de medidas aparece 0. Esto indica que la distancia del punto F a la mediana es 0. Por tanto, la mediana pasa por el baricentro.

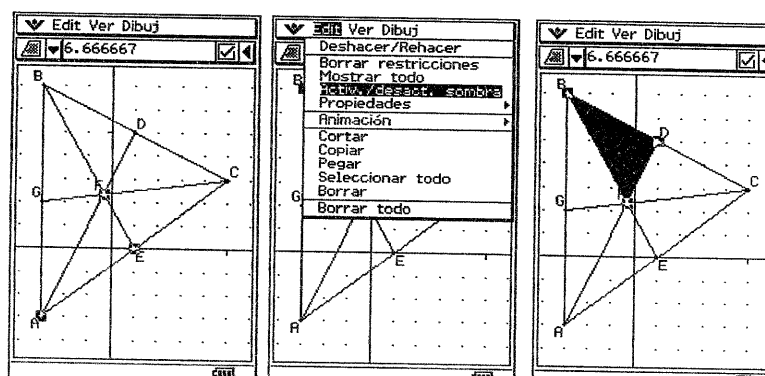


- Arrastra los vértices del triángulo ABC a otras posiciones y observa cómo se cortan siempre en el baricentro.



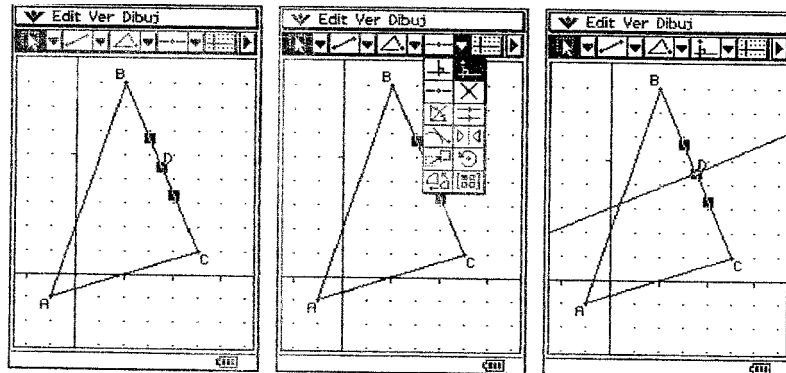
4) Al trazar las tres medianas de un triángulo, éste queda dividido en 6 triángulos. Compara las áreas de estos triángulos con el área del triángulo original.

- Selecciona simultáneamente los puntos B, D y F del triángulo anterior (es decir, un vértice, el punto medio de un lado y el baricentro). Elige el comando Edit / Activ. / desact. Sombra. Observa que se sombrea el triángulo BDF.
- En el botón existente junto al cuadro de medidas, elige Área y observa que en el cuadro de medidas aparece el área del triángulo BDF.
- Selecciona los vértices A, B y C de triángulo y observa su área en el cuadro de medidas. Compara las áreas de los triángulos BDF y ABC.
- Compara de la misma forma las áreas de los otros triángulos con la del triángulo ABC.

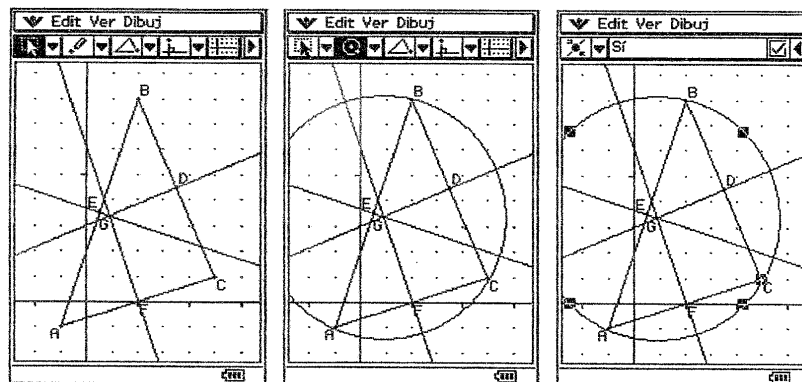


5) Dibuja el circuncentro del triángulo de vértices $(-1, -1)$, $(2, 8)$ y $(5, 1)$ y la circunferencia circunscrita.

- Para construir una mediatriz, halla primero el punto medio del lado y seleccionar dicho punto medio junto con el lado mismo y usa la herramienta Perpendicular.

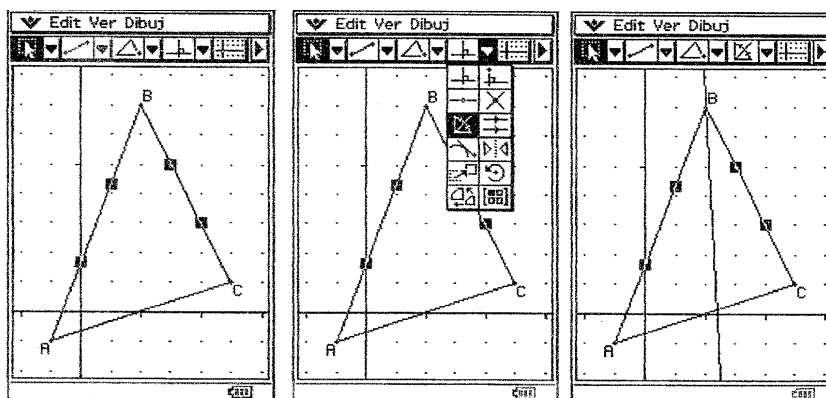


- Una vez obtenido el circuncentro G como intersección de las mediatrices, dibuja una circunferencia de centro G que pase por uno de los vértices del triángulo. Esta circunferencia es la circunscrita.
- Observa que la circunferencia circunscrita pasa por los tres vértices. Compruébalo con el cuadro de medidas.

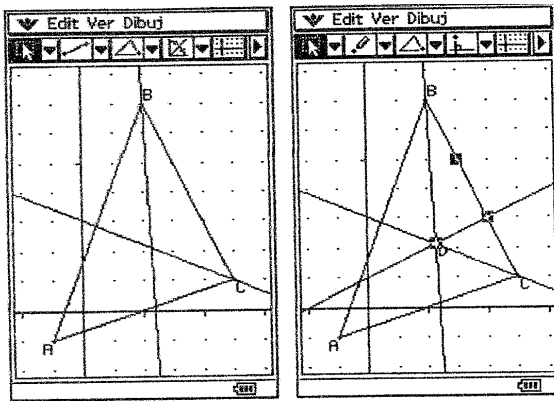


6) Dibuja el incentro del triángulo de vértices $(-1, -1)$, $(2, 8)$ y $(5, 1)$ y la circunferencia inscrita.

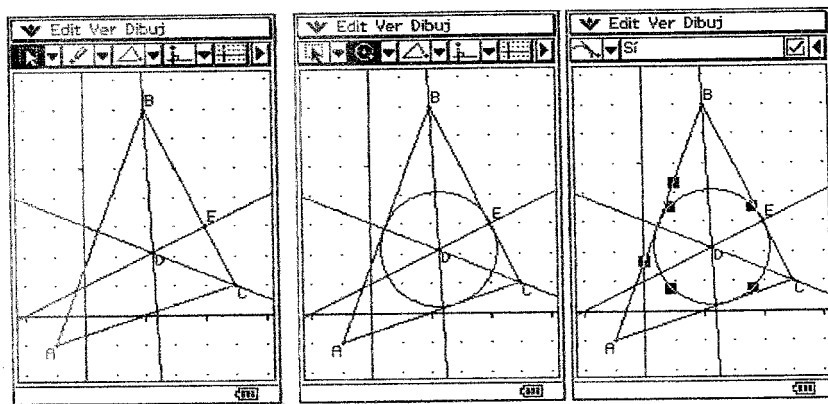
- Para construir la bisectriz de un ángulo, selecciona el par de lados y haz clic en el botón Bisectriz de ángulo de la lista desplegable Construcción.



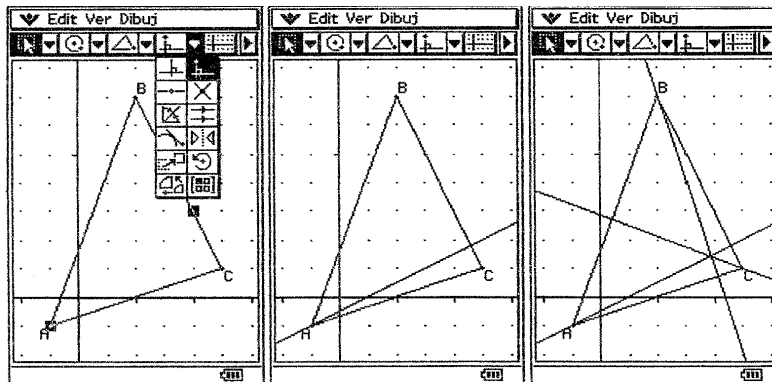
- Una vez obtenida la intersección de las bisectrices (incentro O), dibuja una recta perpendicular a un lado que pase por el incentro.



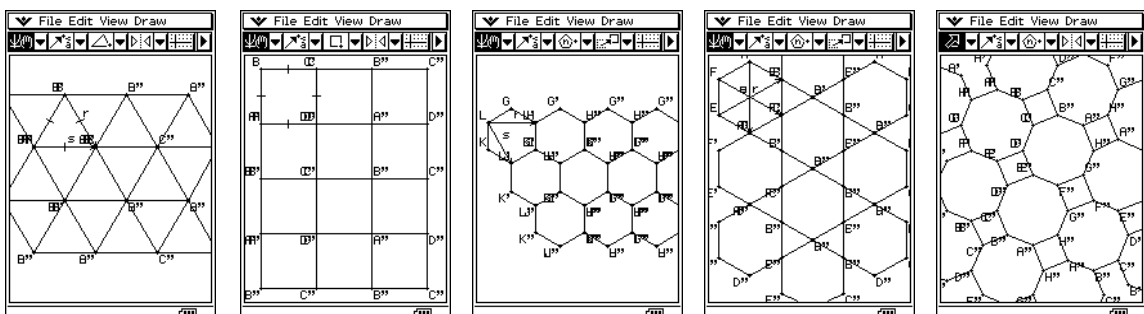
- Halla el punto de corte de la perpendicular con el lado correspondiente y dibuja una circunferencia de centro O que pase por dicho punto. Ésta es la circunferencia inscrita.
- Observa que la circunferencia inscrita es tangente a los tres lados. Compruébalo seleccionando un lado y el círculo y observando la opción tangente del cuadro de medidas.



- 7) Dibuja el ortocentro del triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 8)$ y $C(5, 1)$. Para construir la altura de un triángulo, selecciona el vértice y el lado opuesto y usa la herramienta Perpendicular.

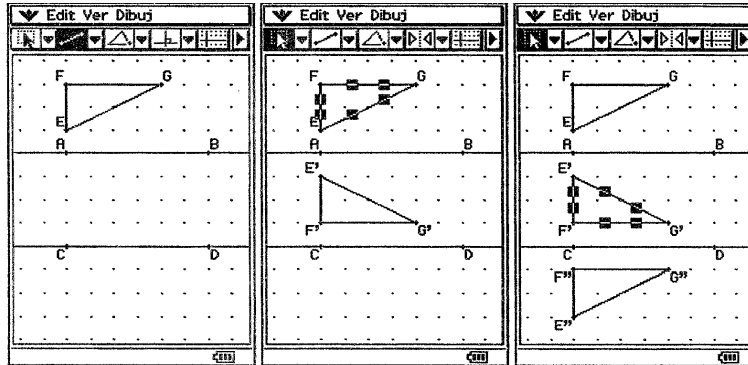


- 8) Utilizando las herramientas de traslación, simetría y giro de la Classpad, dibuja los siguientes mosaicos. Los tres primeros son los únicos regulares que existen, los otros dos son semiregulares.

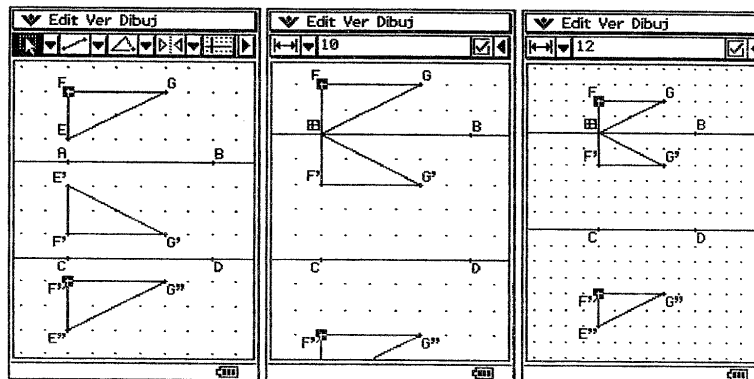


9) Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación e indica sus características (dirección, vector de traslación).

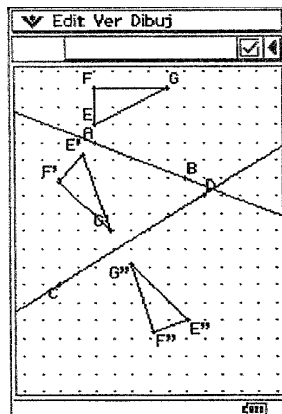
- Con el formato de rejilla entera activado, dibuja dos rectas paralelas, AB y CD, y un triángulo rectángulo EFG.
- Dibuja el simétrico del triángulo EFG respecto de la recta AB. Después, dibuja el simétrico del triángulo obtenido respecto de la recta CD.




- Comprueba que la nueva imagen obtenida se puede hallar por medio de una traslación de vector perpendicular a los ejes de simetría, de módulo igual al doble de la distancia entre dichos ejes. Para ello comprueba que la distancia entre F y F'' es el doble de la distancia entre los ejes y que el ángulo formado por el vector EE'' y los ejes es de 90 grados.
- Arrastra las rectas paralelas y comprueba que se sigue cumpliendo la propiedad anterior.

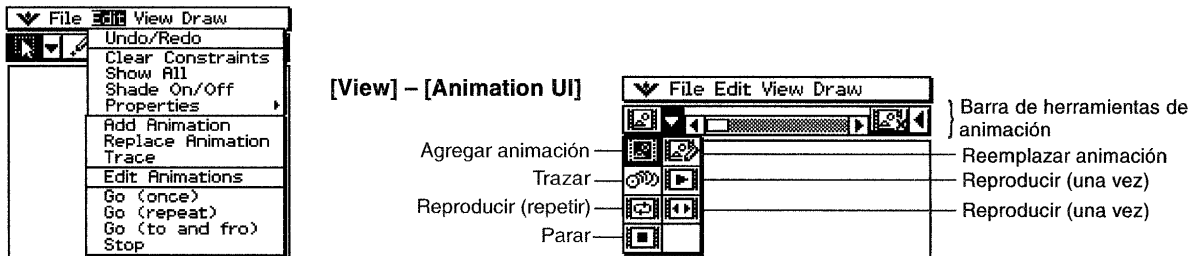


10) Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro e indica sus características (centro y ángulo de giro).



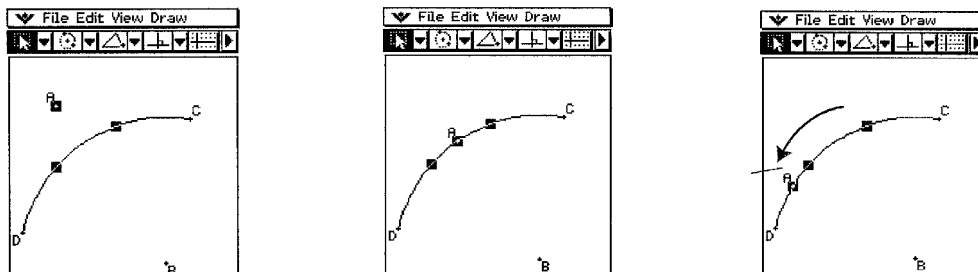
• ANIMACIONES

Puedes construir y ejecutar una animación usando comandos del menú o usando la barra de herramientas de animación que aparece cuando seleccionas el comando Ver / UI de animación. Para editar animaciones, debes seleccionar el comando Edit / Animación / Editar animaciones. Para cerrar la barra de herramientas de animación y volver a la barra normal, toca el botón  situado a la derecha de la barra de herramientas de animación o selecciona el comando Ver / UI de animación.



1) Haz que un punto se mueva sobre un arco mediante una animación. Sigue los siguientes pasos:

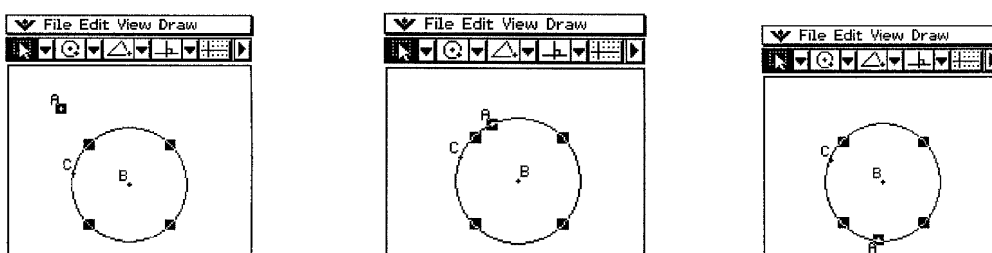
- Marca un punto y dibuja un arco. (También puedes dibujar un círculo, una elipse, un segmento de recta o una función).
- Selecciona el punto y el arco.
- Selecciona el comando Edit / Animación / Agregar animación.
- Selecciona el comando Edit / Animación / Reproducir (una vez). Después selecciona sucesivamente las opciones Reproducir (repetir) y Reproducir (av/ret). Observa, en cada caso, que el punto A se mueve a lo largo del arco CD.
- Selecciona el comando Edit / Animación / Parar para parar la animación.



- Dibuja un segmento de recta y marca otro punto.
- Selecciona el segmento y el punto.
- Repite los pasos (c) y (d). Observa que de esta forma se produce una animación múltiple.

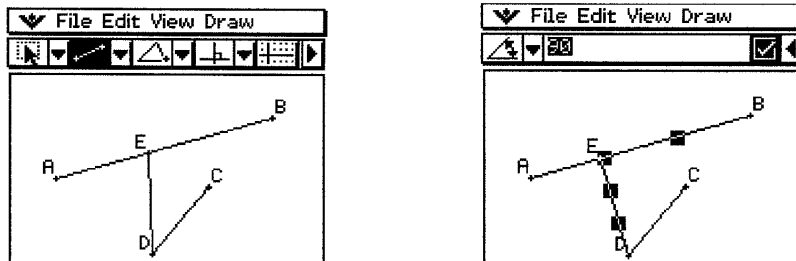
2) Anima un punto alrededor de un círculo. Sigue los siguientes pasos:


- Selecciona el comando Edit / Animación / Editar animaciones. En el cuadro de diálogo que aparece selecciona Eliminar.
- Marca un punto y dibuja un círculo y luego selecciónalos.
- Selecciona Edit / Animación / Agregar animación.
- Selecciona Edit / Animación / Reproducir (una vez). El punto viaja alrededor del círculo.

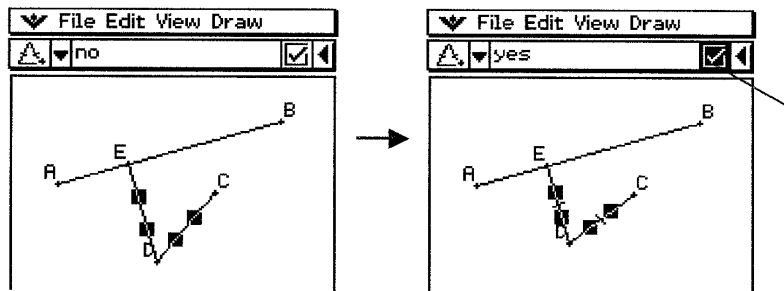


3) Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto y de una recta dada. Sigue los siguientes pasos:

- Dibuja un segmento AB y un punto C que no se encuentre sobre el segmento AB.
- Marca un punto D, que tampoco esté sobre el segmento AB y que esté en el mismo lado respecto el segmento que el punto C.
- Dibuja un segmento que conecte el punto D con el punto C. Dibuja otro segmento DE que conecte el punto D con el segmento AB.
- Toca el botón [▶] para ver el cuadro de medidas.
- Selecciona los segmentos AB y DE, introduce 90 grados en el cuadro de medidas, y toca el cuadro de marcación junto al cuadro de medidas. Se fija el ángulo entre AB y DE en 90 grados.

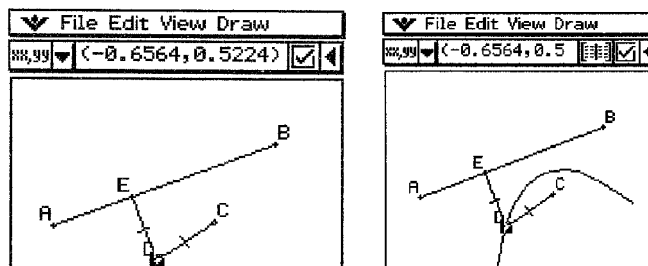


- Selecciona los segmentos DE y DC y luego toca el botón [▼] junto al cuadro de medidas.
- Toca el icono  y selecciona el cuadro de marcación a la derecha del cuadro de medidas. De esta forma los segmentos DE y DC son congruentes en longitud.



Un cuadro de marcación resaltado indica que la medida está fijada (restringida).

- Selecciona el punto E y el segmento AB. Selecciona el comando Edit / Animación / Agregar animación.
- Toca la pantalla para cancelar la selección de los elementos seleccionados.
- Selecciona el punto D. Selecciona el comando Edit / Animación / Trazo.
- Con el punto D todavía seleccionado, elige el comando Edit / Animación / Reproducir (una vez). Se traza una parábola en la pantalla. Observa que el segmento AB es la directriz y el punto C es el foco de la parábola.



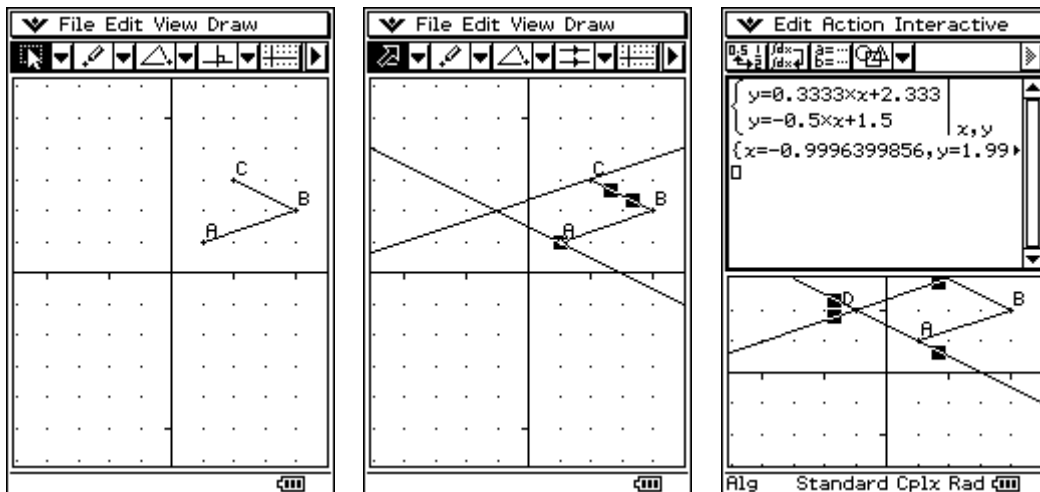
También la ClassPad dispone del menú Cónicas, con el que es posible dibujar la parábola y las demás cónicas, conocida su ecuación. La ClassPad dispone de opciones avanzadas que permiten obtener la ecuación de una cónica o de una curva, sin más que arrastrar el lápiz táctil por la pantalla.

• **GEOMETRÍA ANALÍTICA**

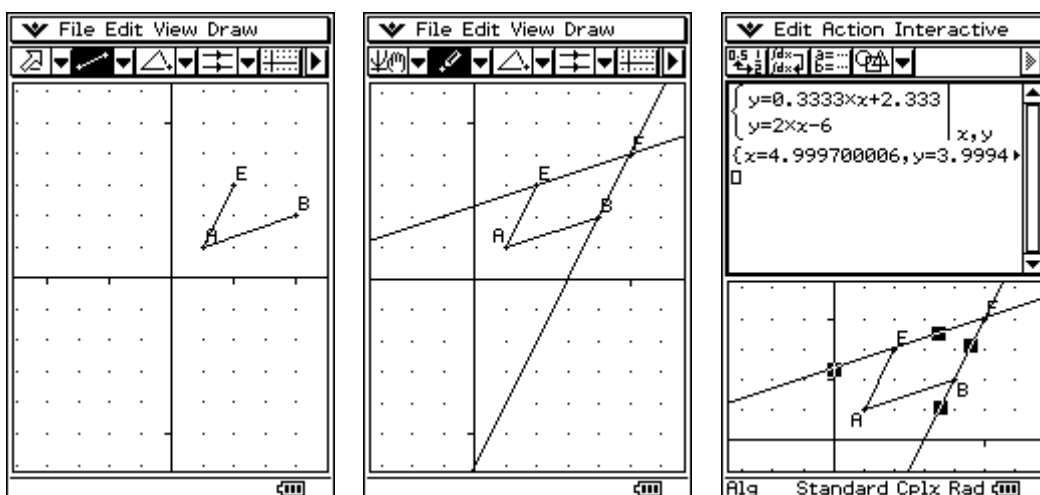
1) Dados los puntos A(1, 1), B(4, 2) y C(2, 3):

- a) Da las coordenadas del punto D de forma que ABCD sea un paralelogramo.
- b) ¿Hay algún otro paralelogramo de vértices A, B y C?
- c) ¿En qué punto M se cortan las diagonales del paralelogramo ABCD?
- d) Halla la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.
- e) Halla la ecuación de la recta s, paralela a r, que pase por el punto medio entre A y C.
- f) Halla el punto de intersección entre la recta s y la diagonal AC.

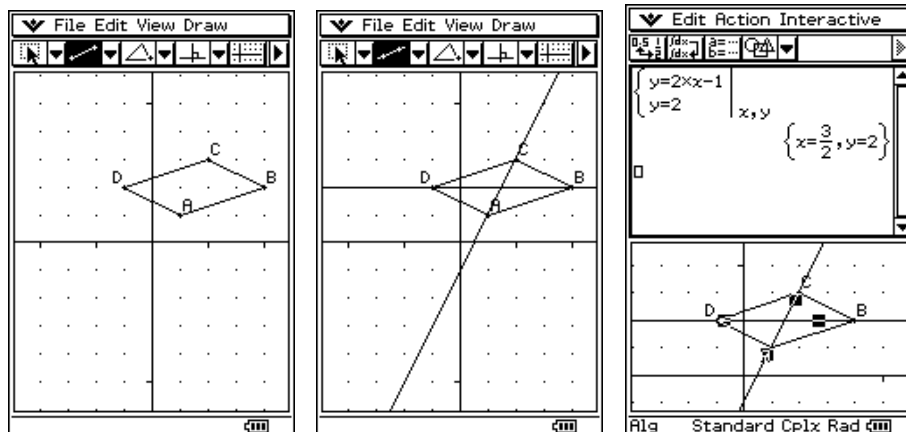
a) Visualiza la ventana de geometría con la rejilla entera y muestra los ejes. Dibuja los segmentos AB y BC con la herramienta Segmento. Para obtener el punto D, traza por A la recta paralela al lado BC (usa la herramienta rectas paralelas de la ClassPad); traza por C la recta paralela al segmento AB. Señala el punto de corte. Para averiguar sus coordenadas, selecciona las dos rectas y arrastra la selección a la ventana Principal; en ella, resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas. Observa que el punto buscado es D(-1,2).



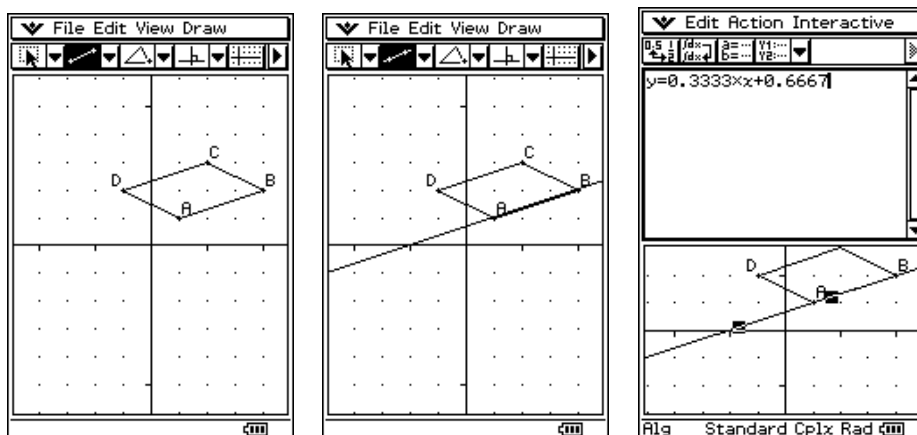
b) También podría ser solución el punto E(5, 4) en el paralelogramo ACBE, tal como se muestra en las siguientes figuras:



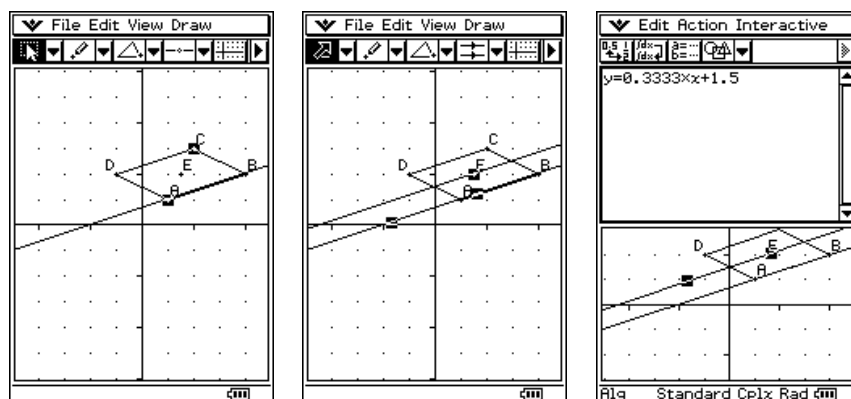
c) Continuando con la solución obtenida en el apartado (a), una vez dibujado el paralelogramo ABCD con A(1, 1), B(4, 2), C(2, 3) y D(-1, 2), dibujamos las dos diagonales AC y BD. Para hallar el punto de corte, seleccionamos dichas diagonales y las arrastramos a la ventana principal. En dicha ventana, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas, obteniendo como punto de corte M(3/2, 2)



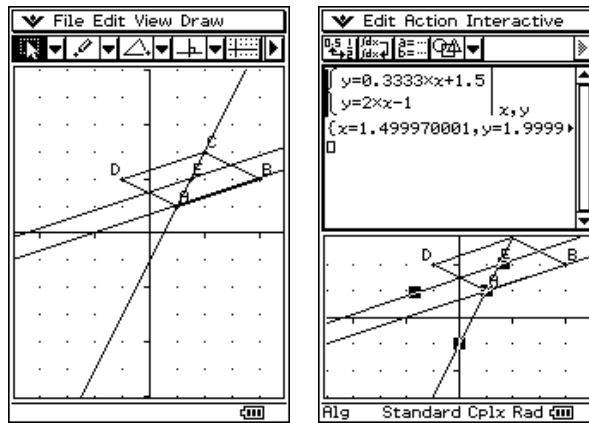
- d) Una vez construido el paralelogramo ABCD, dibujamos la recta AB usando la herramienta “recta que pasa por dos puntos”. La seleccionamos y arrastramos hasta la ventana principal, en donde aparece su ecuación: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.



- e) En primer lugar hallamos el punto medio del segmento AC. Para ello, seleccionamos los puntos A y C y tocamos el botón “punto medio”, obteniendo el punto E. A continuación, dibujamos la recta que pasa por E y es paralela a AB. Por último, seleccionamos la recta obtenida y la arrastramos a la ventana Principal, en la que aparece su ecuación: $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$.

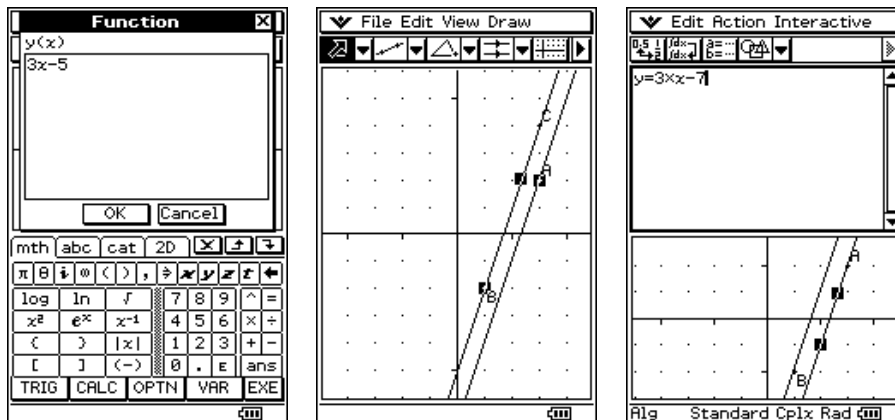


- f) Con la herramienta “recta que pasa por dos puntos”, dibujamos la diagonal AC. Seleccionamos la recta s y la diagonal AC y arrastramos la selección hasta la ventana Principal, en la que aparece el sistema formado por las ecuaciones de dichas rectas. Resolviendo el sistema, obtenemos el punto de intersección (1.5, 2), es decir, (3/2, 2). Se observa, por tanto, que las rectas dadas se cortan en el punto medio de las diagonales.



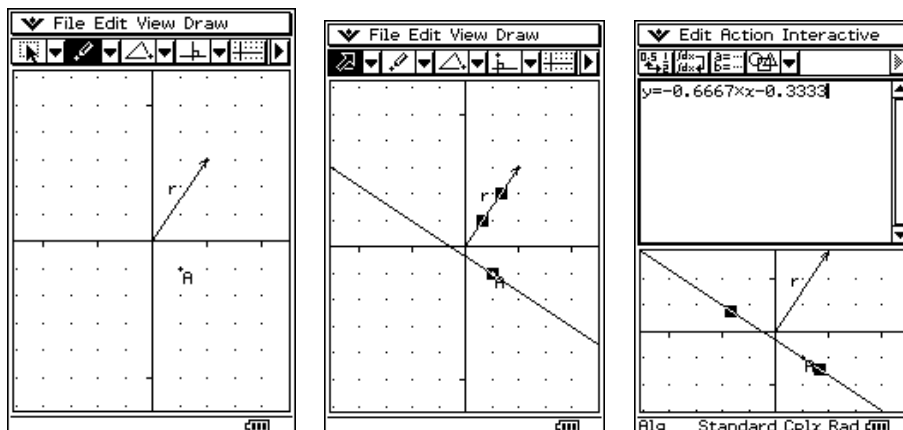
2) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3, 2) y es paralela a la recta $3x - y = 5$.

Visualiza la ventana de Geometría con la rejilla entera y muestra los ejes. Para dibujar la recta $3x - y = 5$, selecciona el comando Draw/Function y, en el cuadro de diálogo Function, introduce la expresión de y como función de x (en nuestro caso, $3x - 5$) y haz clic en OK. A continuación, dibuja de nuevo dicha recta con la herramienta “recta que pasa por dos puntos”, haciendo clic en dos cualesquiera de sus puntos (ten en cuenta que la calculadora diferencia entre construcciones geométricas y dibujos) y borra el dibujo de la función. Dibuja el punto P(3, 2) y la recta paralela a la dada que pasa por P. Selecciona esta última recta y arrastra la selección hasta la ventana Principal, en la cual aparecerá la ecuación de dicha recta: $y = 3x - 7$.



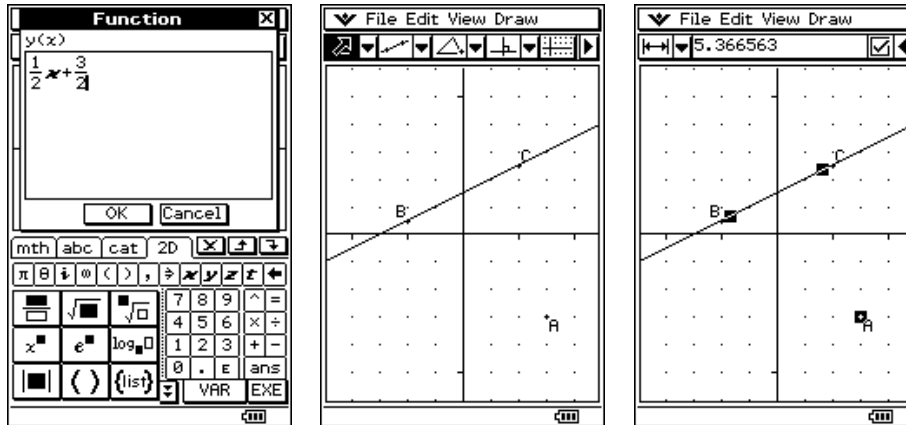
3) Halla la ecuación de la recta de vector ortogonal $v = (2, 3)$ que pasa por el punto P(1, -1).

En la ventana de Geometría con rejilla entera y ejes coordenados, dibujamos el vector $r = (2, 3)$ y el punto A(1, -1). Con la herramienta “recta perpendicular”, dibujamos la recta que pasa por el punto A y es perpendicular al vector r. Seleccionamos dicha recta y la arrastramos a la ventana principal, en la cual aparece su ecuación: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$



4) Halla la distancia del punto $P(3, -3)$ a la recta $x-2y+3=0$.

En la ventana de Geometría (rejilla entera) dibuja el punto $A(3, -3)$ y selecciona el comando Draw/Function. En el cuadro de diálogo introduce la ecuación explícita de la recta y pulsa OK. Sobre la gráfica de la función, con la herramienta “recta por dos puntos” dibuja la recta marcando dos puntos sobre la misma. Selecciona el dibujo de la gráfica y suprimelo. A continuación selecciona la recta BC y el punto A y haz clic en el cuadro de medidas [▶]. Observa en dicho cuadro la distancia entre el punto y la recta, $d(P, r)=5.366563$.

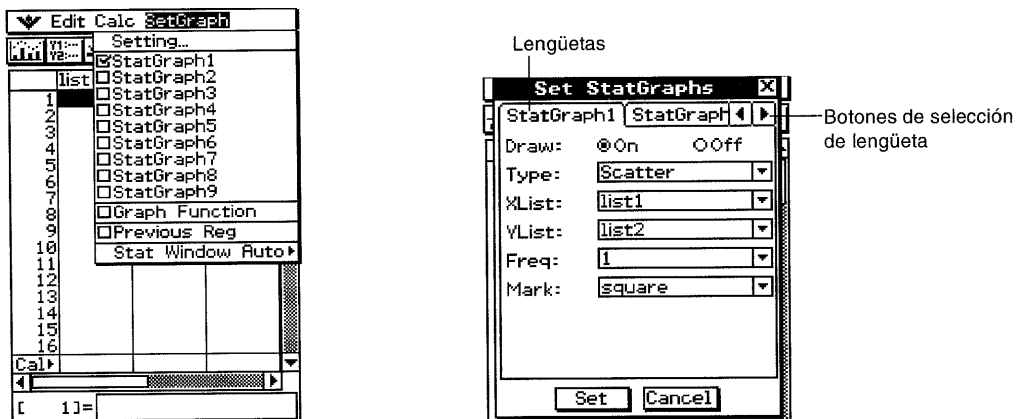


4. Descripción de datos, Probabilidad e Inferencia estadística

• GRÁFICOS Y PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Con la ClassPad 300 es posible describir datos estadísticos, resolver problemas de probabilidad usando distribuciones estadísticas y hacer predicciones a partir de muestras. En este apartado nos limitaremos solamente a la Estadística Descriptiva. Si seleccionas el menú Estadística, verás una pantalla en la que se pueden entrar datos con sus frecuencias: es el editor de listas.

- Toca el menú ConfGraf en la barra de menús del editor de listas. Aparece el menú de configuración de gráficos estadísticos.




- En la ventana del editor de listas, selecciona el comando ConfGraf / Opciones... Aparece el cuadro de diálogo de configuración de gráficos estadísticos. En él hay una ficha para cada gráfico estadístico, denominadas Gráfico estadís. 1 a Gráfico estadís. 9.
- Toca la solapa de cada ficha para configurar cada gráfico estadístico. Toca los botones de selección On Off para activar o desactivar cada uno de los gráficos estadísticos.
- En la ListaX, selecciona el nombre de la lista (list1 a list6, o un nombre de lista) a usar como datos del eje X. La opción por defecto es list1.
- En la ListaY, selecciona el nombre de la lista (list1 a list6, o un nombre de lista) a usar como datos del eje Y. La opción por defecto es list2.

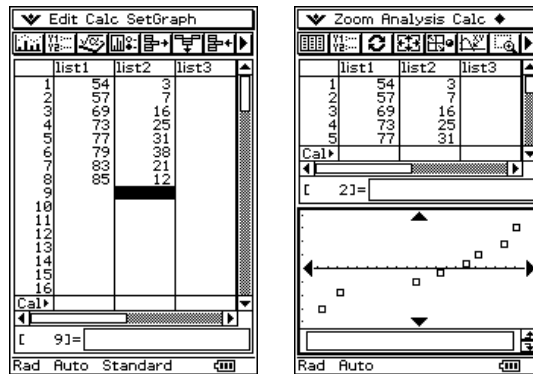
- En la lista Frec., selecciona 1 si todos las parejas (x, y) tienen frecuencia 1, o selecciona la lista (list1 a list6 o nombre de lista) que contiene las frecuencias de cada pareja (x, y).
 - Configura las opciones de gráficos estadísticos, eligiendo el tipo de gráfico de la lista desplegable Tipo.
 - En la lista Marca, selecciona la forma que deben tener los puntos del gráfico. Pueden ser: cuadrado (□), cruz (×), punto grueso (■) y punto (•).
 - Finalmente, toca el botón [Def.] para definir la configuración de los gráficos estadísticos.
- 1) Una compañía de seguros quiere realizar un estudio sobre la esperanza de vida de los españoles para ajustar sus cuotas de seguros. Para ello contrata los servicios de una empresa de investigación, que inicia el estudio con una muestra de 153 individuos, que resultaron tener una esperanza de vida X en años expresada en la siguiente tabla:

X	54	57	69	73	77	79	83	85	
F	3	7	16	25	31	38	21	12	$\sum F = 153$


Dibuja el gráfico de probabilidad normal, el histograma, el diagrama de cajas Med, el diagrama de cajas modificado, la curva de distribución normal y el gráfico de línea a trozos.

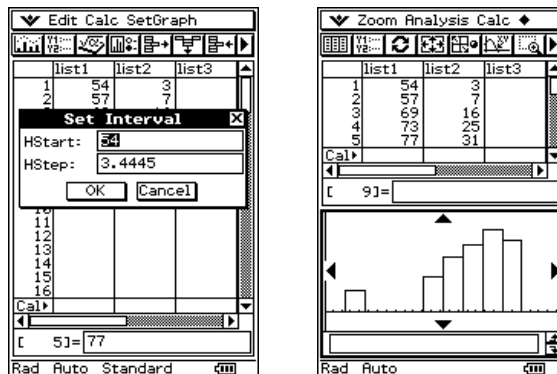
- **Gráfico de probabilidad normal**

- En el editor de listas, introduce los valores de X en la lista list1 y las frecuencias en la lista list2.
- A continuación, selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona el tipo de gráfico GrafPNormal, ListaX = list1, Marca = □ cuadrado. Toca el botón [Def.]. Toca el botón  para dibujar el gráfico. Observa el resultado.



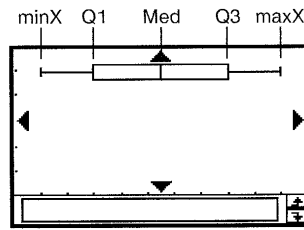
- **Histograma**

- Selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona el tipo de gráfico Histogram., ListaX = list1, Freq = list2. Toca el botón [Def.]. Toca el botón  para dibujar el gráfico. Pulsa el botón [Acep.] para aceptar las dimensiones del intervalo. Observa el resultado.

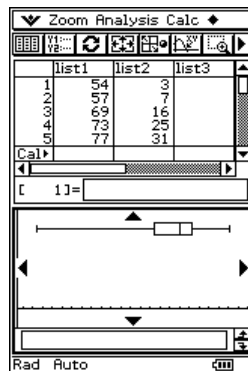


- **Diagrama de cajas Med**

- Este gráfico se llama también “de cajas y bigotes” y representa los valores mínimo (minX) y máximo (maxX), así como los cuartiles Q_1 , Q_3 y la mediana Med, tal como se indica en la siguiente figura:

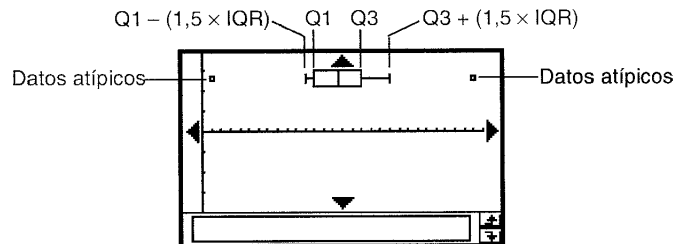


- Selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona el tipo de gráfico CajaMed., ListaX = list1, Freq = list2. Toca el botón [Def.]. Toca el botón para dibujar el gráfico. Observa el resultado.

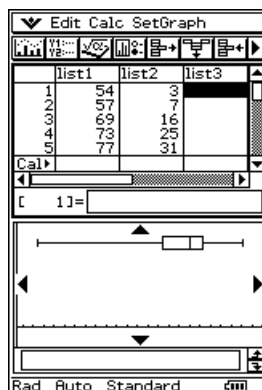


- **Diagrama de cajas modificado**

- Este gráfico utiliza la fórmula $1,5 \times RI$, siendo $RI = \text{rango intercuartílico} = Q_3 - Q_1$, para mostrar los valores alejados (outliers) que son aquellos valores que no siguen el mismo patrón que el resto de datos. Si un valor es menor que $Q_1 - 1,5 \times RI$, se dice que es un valor alejado por la izquierda. Si un valor es mayor que $Q_3 + 1,5 \times RI$, se dice que es un valor alejado por la derecha. Los valores alejados se representan por círculos en el diagrama.




- Selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona el tipo de gráfico CajaMod., ListaX = list1, Freq = list2. Toca el botón [Def.]. Toca el botón para dibujar el gráfico. Observa el resultado.

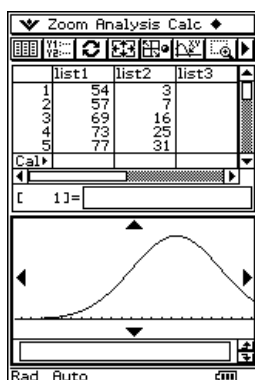


- **Curva de distribución normal**


- La curva de distribución normal se representa gráficamente utilizando la función de distribución normal siguiente:

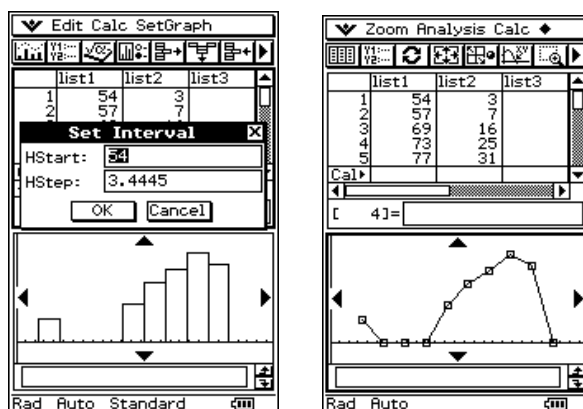
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

- Selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona el tipo de gráfico DistNor., ListaX = list1, Freq = list2. Toca el botón [Def.]. Toca el botón  para dibujar el gráfico. Observa el resultado.



- **Gráfico de Línea a trazos**


- En este gráfico se conectan mediante segmentos los puntos centrales de cada barra del histograma.
- Selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona el tipo de gráfico L.Trazos, ListaX = list1, Freq = list2. Toca el botón [Def.]. Toca el botón  para dibujar el gráfico. Toca el botón [Acep.] para aceptar las dimensiones del intervalo. Observa el resultado.

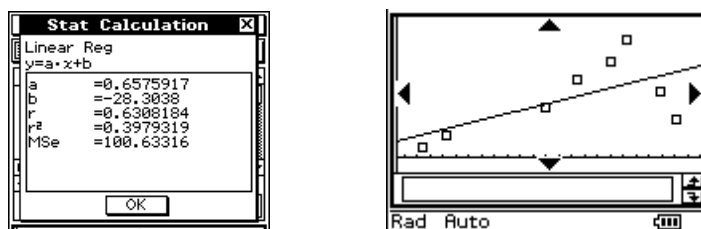


2) Halla la ecuación de la recta de regresión lineal correspondiente a los siguientes datos, correspondientes a las puntuaciones de ocho estudiantes en dos tests. Sigue los siguientes pasos:

List1	54	57	69	73	77	79	83	85
List2	3	7	16	25	31	38	21	12

- Como los datos coinciden con los de la actividad anterior, nos ahorramos la tarea de introducirlos en las listas list1 y list2 del editor de listas.
- Con la ventana de listas activada, selecciona el comando ConfGraf / Opciones.. En la siguiente ventana elige las opciones: Dibujo: On, Tipo: Disper., ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1, Marca=cuadrado. Toca el botón [Def.]. Observa el gráfico de dispersión.
- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando Calc. / Regresión lineal.
- Toca el botón [Acep.] de la ventana Definir cálculo para aceptar las opciones que aparecen.


- En la ventana Calc. Estadístico se muestra la ecuación de la recta de regresión lineal de mínimos cuadrados, el valor del coeficiente de correlación lineal r y el valor del coeficiente de determinación r^2 . Toca el botón [Acep.].
- Toca el botón  para que se dibuje la recta de regresión.

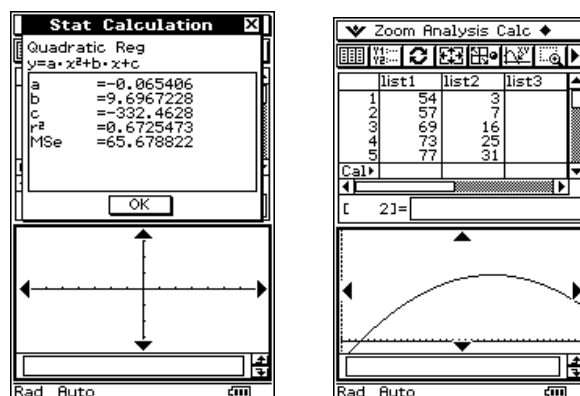



- **Gráficos de regresión cuadrática, cúbica y cuártica**

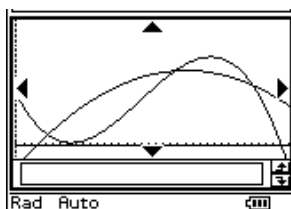
3) Halla la ecuación de las curvas de regresión cuadrática, cúbica y cuártica correspondiente a las siguientes puntuaciones de ocho estudiantes en dos tests. Sigue los siguientes pasos:


List1	54	57	69	73	77	79	83	85
List2	3	7	16	25	31	38	21	12

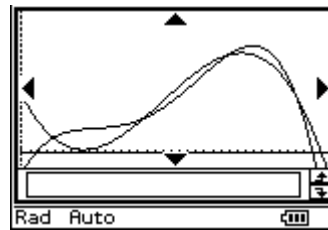
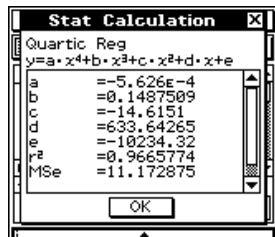
- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando Calc. / Regresión cuadrática.
- Toca el botón [Acep.] de la ventana Definir cálculo para aceptar las opciones que aparecen.
- En la ventana Calc. Estadístico se muestra la ecuación de la recta mediana-mediana. Toca el botón [Acep.].
- Toca el botón  para que se dibuje la curva de regresión.



- Toca la ventana de listas para activarla y selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana introduce las opciones: Dibujo: On, Tipo: RegrCubic, ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1. Toca el botón [Def.].
- Toca el botón  para trazar el gráfico de regresión. Observa la curva de regresión obtenida.



- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando Calc / Regr. cuarto orden. En la siguiente ventana, toca el botón [Acep.].
- Aparece la ecuación de la curva de regresión de cuarto grado. Toca el botón [Acep.]
- Toca el botón  para que se dibuje la curva de regresión. Observa que se aproxima a los datos mejor que las curvas anteriores. Esto está indicado por el coeficiente de determinación r^2 que es superior a los casos anteriores.

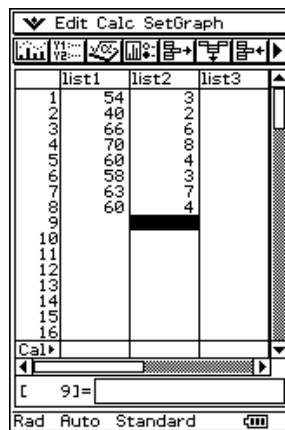


• **Gráficos de regresión logarítmica, exponencial y potencial**

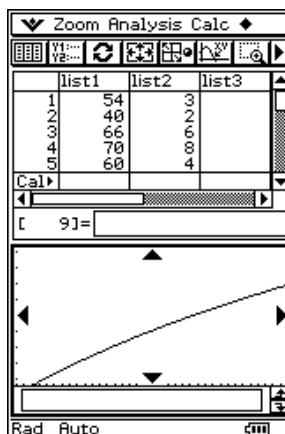
4) La siguiente tabla recoge las puntuaciones obtenidas en un test sobre visión espacial (T) y sus correspondientes calificaciones en la asignatura de Dibujo (D). Halla la ecuación de las curvas de regresión logarítmica, exponencial y potencial correspondiente a dichos datos. Sigue los siguientes pasos:

T	54	40	66	70	60	58	63	60
D	3	2	6	8	4	3	7	4


- En el editor de listas, en las listas list1 y list2 introduce los valores de la tabla anterior.

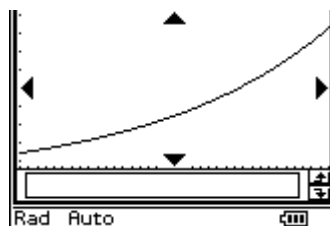
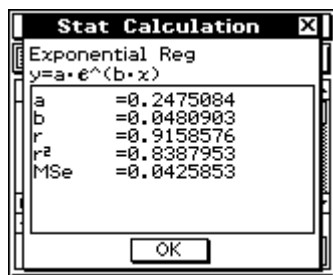



- Con la ventana de listas activada, selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana, selecciona las siguientes opciones: Dibujo: On, Tipo: RegrLog, ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1. Toca el botón [Def.].
- Toca el botón para dibujar el gráfico de regresión logarítmica.

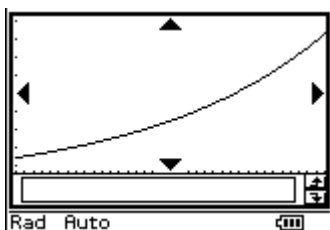



- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando \blacklozenge / Borrar todo.
- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando Calc / Regr. exponencial. En la siguiente ventana selecciona las siguientes opciones ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1. Toca el botón [Acep.].
- En la ventana Calc. Estadístico se muestra la ecuación de la curva de regresión exponencial, que es de la forma $y = a \cdot e^{bx}$. Se indica también el valor del coeficiente de determinación r^2 que indica la bondad del ajuste de la nube de puntos por la curva de regresión.

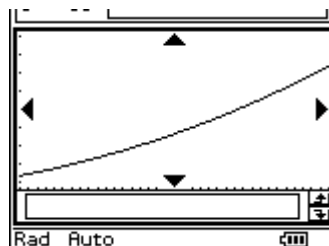
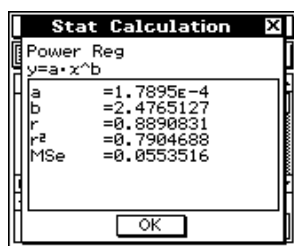
- Toca el botón [Acep.] y toca el botón  para dibujar la curva de regresión exponencial. Observa el resultado.



- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando \blacklozenge / Borrar todo.
- Con la ventana de listas activada, selecciona el comando ConfGraf / Opciones... En la siguiente ventana selecciona las siguientes opciones: Dibujo: On, Tipo=Rexp.ab, ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1. Toca el botón [Acep.].
- Toca el botón  para dibujar el gráfico de regresión exponencial, que responde a la función $y = a \cdot b^x$. Observa el resultado.



- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando \blacklozenge / Borrar todo.
- Con la ventana de gráficos activada, selecciona el comando Calc / Regr. potencial. En la siguiente ventana selecciona las opciones ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1. Toca el botón [Acep.].
- En la ventana Calc. Estadístico aparece la ecuación de la curva de regresión, que es de la forma $y = a \cdot x^b$ y el valor del coeficiente de determinación r^2 . Toca el botón [Acep.].
- Toca el botón  para dibujar la curva de regresión exponencial. Observa el resultado.



• **Cálculos estadísticos de una variable**

- 5) Se ha aplicado un test de inteligencia a 40 estudiantes, obteniéndose los siguientes resultados, agrupados en intervalos:

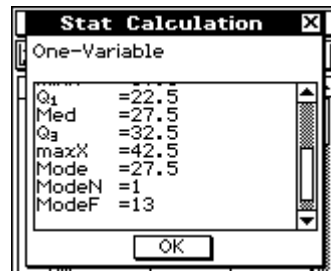
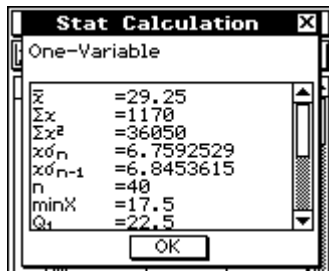
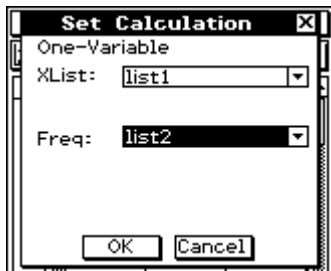
Puntuaciones	[15-20)	[20-25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	[40, 45)
Nº de alumnos	3	8	13	7	6	3

Calcula los parámetros estadísticos: media, varianza, desviación típica, mínimo, máximo, primer cuartil, mediana, tercer cuartil, moda. Sigue los siguientes pasos:

- En la ventana del editor de listas, introduce las marcas de clase en la lista list1 y las frecuencias en la list2.

	list1	list2	list3
1	17.5	3	
2	22.5	8	
3	27.5	13	
4	32.5	7	
5	37.5	6	
6	42.5	3	
7			
8			
9			

- En la barra de menús, selecciona el comando Calc / Una variable.
- En el cuadro de diálogo que aparece, selecciona el nombre list1 como ListaX y selecciona el nombre list2 como Frec y toca el botón [Acep.].



- Aparece una ventana con los valores de los parámetros estadísticos, que son los siguientes:

\bar{x}	Media	Q_1	Primer cuartil
ΣX	Suma de datos	Med	Mediana
ΣX^2	Suma de cuadrados	Q_3	Tercer cuartil
$x\sigma_n$	Desviación típica poblacional	MaxX	Máximo
$x\sigma_{n-1}$	Desviación típica muestral	Mode	Moda
N	Tamaño muestral	ModeN	Número de elementos iguales a la moda
MinX	mínimo	ModeF	Frecuencia de la moda

- **Cálculos estadísticos de dos variables**

6) Las estaturas de 10 chicas y de sus respectivas madres son las siguientes, expresadas en cm:

Hijas	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
Madres	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

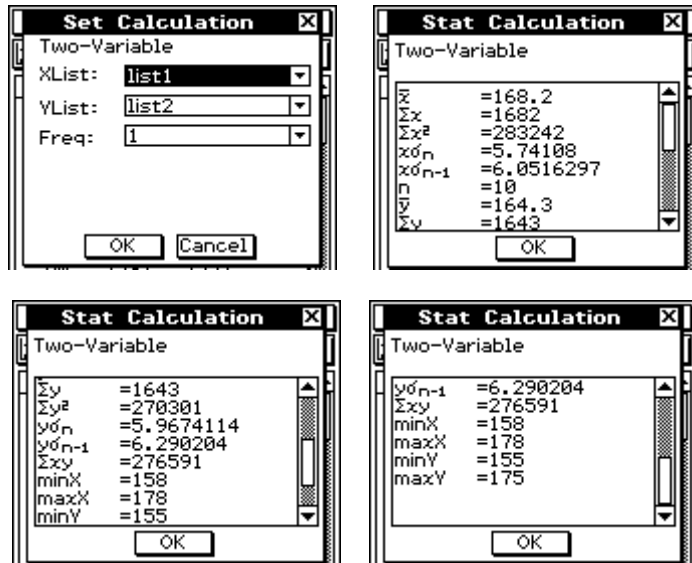
Calcula los parámetros estadísticos de dichas variables: media, desviación típica, suma de productos, mínimo, máximo. Sigue los siguientes pasos:

- En la ventana del editor de listas, introduce los datos de las chicas en la lista list1 y los datos de las madres en la list2.

	list1	list2	list3
1	158	163	
2	162	155	
3	164	160	
4	165	161	
5	168	164	
6	169	158	
7	172	175	
8	172	169	
9	174	166	
10	178	172	
11			
12			

- En la barra de menús, selecciona el comando Calc / Dos variables.

- En el cuadro de diálogo que aparece, selecciona el nombre list1 como ListaX, el nombre list2 como ListaY y Frec=1. Toca el botón [Acep.].



- Aparece una ventana con los valores de los parámetros estadísticos, que son los siguientes:

\bar{x}	Media de la lista X	\bar{y}	Media de la lista Y
Σx	Suma de la lista X	Σy	Suma de la lista Y
Σx^2	Suma de cuadrados de la lista X	Σy^2	Suma de cuadrados de la lista Y
$x\sigma_n$	Desviación típica poblacional de X	$y\sigma_n$	Desviación típica poblacional de Y
$x\sigma_{n-1}$	Desviación típica muestral de X	$y\sigma_{n-1}$	Desviación típica muestral de Y
N	Tamaño muestral	Σxy	Suma de productos de las listas X e Y
MinX	Mínimo de la lista X	minY	Mínimo de la lista Y
MaxX	Máximo de la lista X	maxY	Máximo de la lista Y

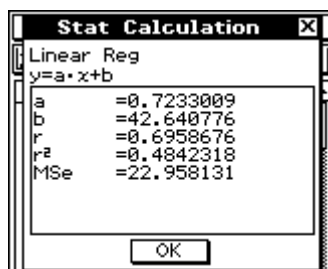
- Cálculos estadísticos de regresión**

7) Las estaturas de 10 chicas y de sus respectivas madres son las siguientes, expresadas en cm:

Hijas	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
Madres	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172


Halla la recta de regresión de mínimos cuadrados, determina el coeficiente de correlación, analiza los residuos entre los datos reales y el modelo de mínimos cuadrados y estima la estatura de la madre cuando la estatura de la hija es de 167 cm. Investiga otros modelos de regresión. Sigue los siguientes pasos:

- Con la ventana de listas activa, selecciona el comando Calc / Regresión lineal. En la siguiente ventana selecciona las opciones ListaX=list1, ListaY=list2, Frec=1. Toca el botón [Acep.].
- Aparece una ventana con la ecuación de la recta de regresión y el valor del coeficiente de correlación, así como el valor del coeficiente de determinación.





- Como el coeficiente de determinación es pequeño, el modelo lineal es poco explicativo de los datos. Para analizar los residuos, selecciona el comando Calc. / Regresión lineal. En la siguiente ventana selecciona la opción Calc. Residual / On y toca el botón [Acep.].
- Toca el botón [Acep.] de la siguiente ventana. Para ver los residuos, toca el cuadro de nombre de la list3. En la caja List= introduce el nombre “residual”, utilizando el teclado virtual [abc]. Toca el botón [Ejec.].

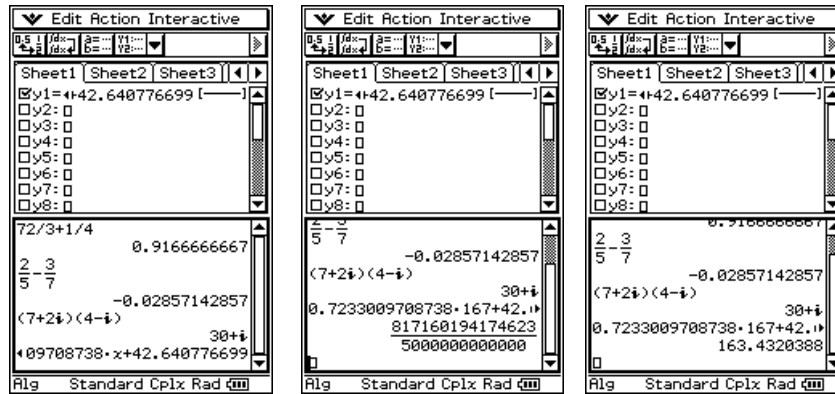
	list1	list2	resid...
1	158	163	6.0776
2	162	155	-4.815
3	164	160	-1.262
4	165	161	-0.985
5	168	164	-0.155
6	169	158	-6.878
7	172	175	7.9514
8	172	169	1.9514
9	174	166	-2.495
10	178	172	0.6116
11			
12			
13			
14			
15			
16			

- En la lista “resid...” se muestran las distancias entre los puntos reales y el modelo de regresión. Si la distancia es positiva, el punto está por encima del modelo de regresión; si es negativa, está por debajo del modelo.
- Vamos a estimar el valor de list2 cuando list1=167. Para ello, selecciona el comando Calc / Regresión lineal. En el siguiente cuadro de diálogo selecciona de la lista desplegable Copiar fórmula la línea (y1 a y20) en la que quieres copiar la fórmula. Por ejemplo, la línea y1. Toca el botón [Acep.].
- En la siguiente ventana toca el botón [Acep.]. Toca el botón  y comprueba que la ecuación de la recta de regresión se ha copiado en la línea Y1=.

	list1	list2
1	158	163
2	162	155
3	164	160
4	165	161
5	168	164

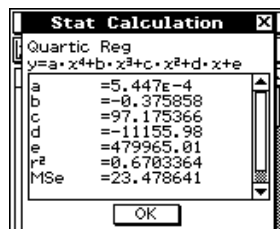
- Para obtener la estatura de la madre correspondiente a una estatura de 167 cm para la hija, basta averiguar Y1(167). Selecciona el cuadro de marcación de la función Y1 y desactiva todos los demás.

- Toca el botón  para abrir la ventana Principal. Con el editor de gráficos y la ventana Principal en pantalla, selecciona la expresión a la derecha de Y1= y arrástrala con el lápiz táctil hasta una entrada vacía de la ventana Principal. Observa que la ecuación de la recta de regresión aparece en la ventana principal. Selecciona la variable x y, en su lugar, con ayuda del teclado virtual, introduce la estatura de la hija, 167 cm, y toca el botón [Ejec.]. Selecciona la expresión anterior y toca el botón  para obtener el resultado en forma decimal.

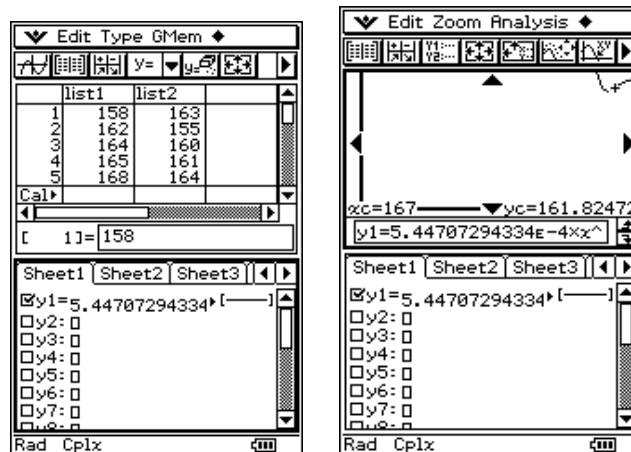


Por tanto, según el modelo lineal, la estatura de la madre, cuando la de la hija es de 167 cm, es de 163,4 cm. Pero esta estimación es poco fiable, debido al valor del coeficiente de determinación.

- Cierra la ventana Principal y el editor de gráficos, con el comando / Cerrar. Con la ventana de listas activa, selecciona el comando Calc. / Regr. cuarto orden. En el siguiente cuadro de diálogo selecciona la opción Copiar fórmula / y1. Toca el botón [Acep.].



- Observa que el valor del coeficiente de determinación, r^2 , indica que el modelo de cuarto grado es mejor que el lineal. Toca el botón y comprueba que la curva de regresión se ha copiado en la línea Y1=.



- Toca el botón para abrir la ventana de visualización. Introduce 180 como valores máximos para X y para Y. Toca el botón para dibujar la función de regresión. Con la ventana de gráficos activa, selecciona el comando Análisis / Trazo. A continuación pulsa con el teclado 167. Aparece el cuadro de introducción de valores. Toca el botón [Acep.]. En pantalla se muestra el valor de la función de regresión, 161, 82472. Por tanto, si la estatura de la hija es de 167 cm, estimamos que la estatura de la madre será de, aproximadamente, 162 cm.

Podemos ensayar otros modelos de regresión (med-med, cuadrática, cúbica, logarítmica, exponencial, potencial, sinusoidal y logística), como puedes ver en el menú Calc. cuando la ventana de listas está activa.

• PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA

La calculadora ClassPad 300 permite obtener con facilidad números combinatorios, factoriales, áreas bajo la curva normal y valores de la distribución binomial. También permite obtener intervalos de confianza para la media y la proporción, así como resolver tests de hipótesis y casi todos los problemas relativos al análisis de muestras. En esta sesión estudiaremos algunas de las posibilidades de la ClassPad 300 para el estudio de la Probabilidad y la Inferencia en ESO y Bachillerato.

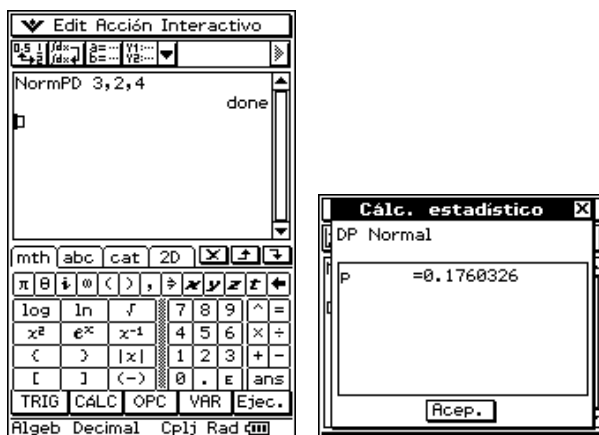
• Densidad de probabilidad normal

El comando NormPD (que se obtiene en el teclado virtual [cat], dentro de la aplicación Programas) calcula la densidad de probabilidad de la distribución normal para un valor x. Utiliza para ello la expresión

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$. La sintaxis del comando es: **NormPD x, σ , \bar{x}** siendo x el dato, σ la desviación típica y \bar{x} la media.

1) Si X es una variable aleatoria normal de media 4 y desviación típica 2, calcula $p(X=3)$. Sigue los siguientes pasos:

- En la aplicación Principal, toca el botón del teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos selecciona NormPD y toca el botón [INTRO] para introducir la función NormPD en la ventana. Con ayuda del teclado virtual [math] completa el comando NormPD 3,2,4. Toca el botón [Ejec.]. En la pantalla aparece la palabra "Done", indicando que ya ha hecho el cálculo.
- Para mostrar el resultado en pantalla, utiliza de nuevo el teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista Forma. Elige el comando DispStat y toca [INTRO] para introducir el comando en la ventana. Toca el botón [Ejec.] y observa el resultado.



• Probabilidad normal acumulada

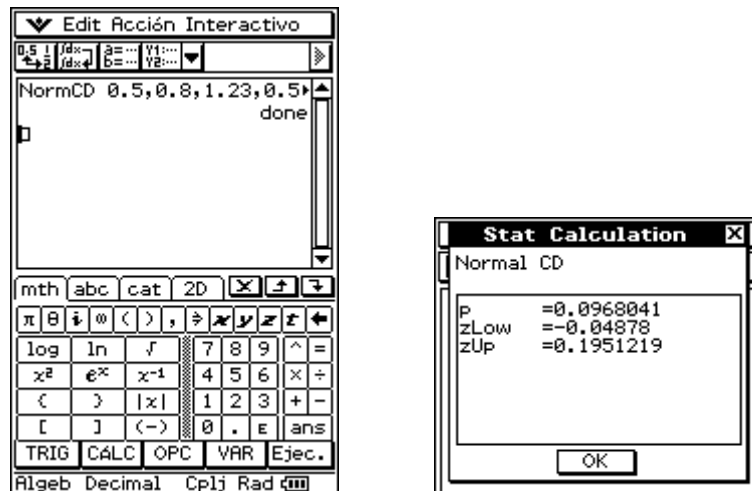
El comando NormCD (situado en el teclado virtual [cat]) calcula la probabilidad de que una variable aleatoria normal tome valores comprendidos entre a y b, utilizando la expresión:

$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$. La sintaxis del comando es: **NormCD a, b, σ , \bar{x}** , siendo a y b los extremos inferior y superior del intervalo.

2) Si X es una variable aleatoria normal de media 0,56 y desviación típica 1,23, calcula $p(0,5 \leq X \leq 0,8)$. Sigue los siguientes pasos:

- En la aplicación Principal, toca el botón del teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos selecciona NormCD y toca el botón [INTRO] para introducir dicha función en la ventana de edición del programa. Con ayuda del teclado virtual [math] completa el comando NormCD 0.5, 0.8, 1.23, 0.56. Toca el botón [Ejec.]. En la ventana aparece "Done" indicando que ya ha hecho el cálculo.

- Para mostrar el resultado en pantalla, utiliza de nuevo el teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista Forma. Elige el comando DispStat y toca [INTRO] para introducir el comando en la ventana. Toca el botón [Ejec.] y observa el resultado



- **Densidad de probabilidad binomial**

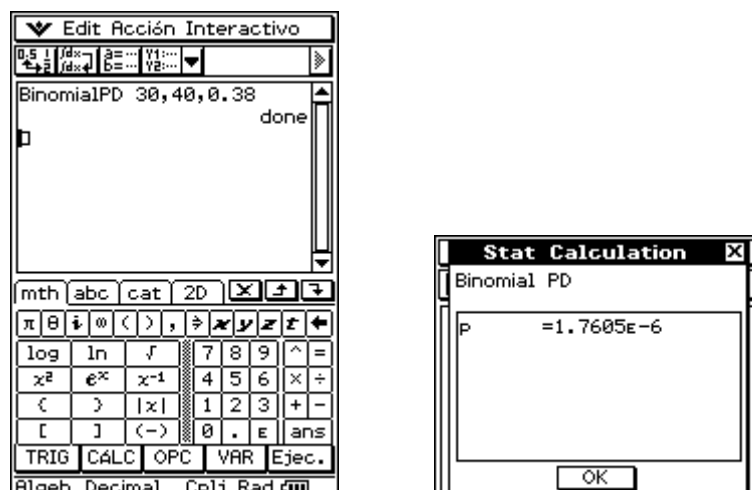
El comando BinomialPD (que se obtiene en el teclado virtual [cat]) calcula la densidad de probabilidad de la distribución binomial para un valor x.

Utiliza para ello la expresión $f(x) = nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, con $x=0, 1, 2, \dots, n$; siendo

p =probabilidad de éxito en una prueba y n el número de pruebas independientes. La sintaxis del comando es: **BinomialPD x, n, p** siendo x el dato, n el número de pruebas independientes y p la probabilidad de éxito en una prueba.

3) Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial de parámetros $n=40$ y $p=0,38$, calcula $p(X=30)$, es decir, la probabilidad de obtener 30 éxitos en 40 pruebas. Sigue los siguientes pasos:

- En la aplicación Principal, toca el botón del teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos selecciona BinomialPD y toca el botón [INTRO] para introducir dicha función en la ventana de edición del programa. Con ayuda del teclado virtual [math] completa el comando BinomialPD 30, 40, 0.38. Toca el botón [Ejec.]. En la ventana aparece la palabra "Done" indicando que ya ha realizado el cálculo.
- Para mostrar el resultado en pantalla, utiliza de nuevo el teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista Forma. Elige el comando DispStat y toca [INTRO] para introducir el comando en la ventana. Toca el botón [Ejec.] y observa el resultado



- **Intervalo de confianza para la media**

El comando OneSampleZInt (situado en el teclado virtual [cat]) calcula el intervalo de confianza para la media poblacional cuando se conoce la desviación típica de la población. Para ello utiliza las fórmulas:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right), \text{ siendo } \alpha \text{ el nivel de significación y } 1-\alpha \text{ el nivel de confianza.}$$

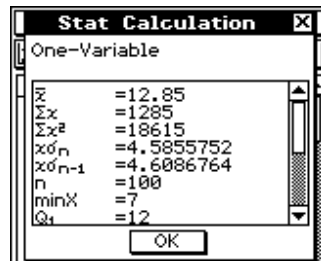
Si se conoce la lista de datos, la sintaxis del comando es: **OneSampleZInt 1- α , σ , List, Frec**, siendo α el nivel de significación, σ la desviación típica, List el nombre de la lista de datos, Frec la lista que contiene las frecuencias de los datos.

Si se conocen los parámetros estadísticos de la muestra, la sintaxis del comando es la siguiente: **OneSampleZInt 1- α , σ , \bar{x} , n**, siendo α el nivel de significación, σ la desviación típica, \bar{x} la media y n el tamaño de la muestra.

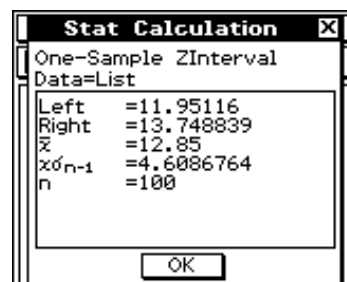
- 4) La siguiente tabla muestra las duraciones (en días) de 100 pastillas de jabón de una determinada marca. Halla un intervalo de confianza para la duración media de dichas pastillas con un nivel de significación $\alpha=0,05$. Sigue los siguientes pasos:

Duración (días)	7	12	17	22
Frecuencia	24	46	19	11

- En el editor de listas de la aplicación Estadística, introduce en las listas list1 y list2 las duraciones y las frecuencias, respectivamente. Selecciona el comando Calc./ Una variable e introduce como frecuencias la lista list2. Toca el botón [Acep.] y observa el resultado.



- En la aplicación Principal, toca el botón del teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos selecciona OneSampleZInt y toca el botón [INTRO] para introducir dicha función en la ventana de edición del programa. Con ayuda del teclado virtual [math] completa el comando OneSampleZInt 0.95, 4.586, list1, list2. Toca el botón [Ejec.]. En la ventana aparece la palabra "Done" indicando que ya ha hecho los cálculos.
- Para mostrar el resultado en pantalla, utiliza de nuevo el teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista Forma. Elige el comando DispStat y toca [INTRO] para introducir el comando en la ventana. Toca el botón [Ejec.] y observa el resultado. Aparece una pantalla con el resultado del cálculo estadístico. En ella se indica que el intervalo de confianza del 95% es (11.95, 13.75).



- **Intervalo de confianza para la proporción**

El comando OnePropZInt (situado en el teclado virtual [cat]) calcula el intervalo de confianza para la proporción de éxitos en una población. Para ello utiliza las fórmulas:

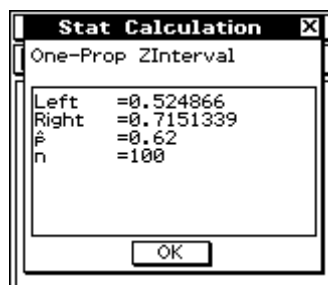
$$\left(\frac{x}{n} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n} \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)}, \frac{x}{n} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n} \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)} \right),$$

siendo α el nivel de significación y $1-\alpha$ el nivel de confianza, x el dato y n el tamaño de la muestra.

La sintaxis del comando es: **OnePropZInt 1- α , x, n**, siendo α el nivel de significación, x el dato y n el tamaño de la muestra.

5) Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Halla un intervalo de confianza para la proporción de caras, con un nivel de confianza del 95%. Sigue los siguientes pasos:

- En la aplicación Principal, toca el botón del teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos selecciona OnePropZInt y toca el botón [INTRO] para introducir dicha función en la ventana de edición del programa. Con ayuda del teclado virtual [math] completa el comando OnePropZInt 0.95, 62, 100. Toca el botón [Ejec.]. En la ventana aparece la palabra "Done" indicando que ya se han realizado los cálculos.
- Para mostrar el resultado en pantalla, utiliza de nuevo el teclado virtual [cat] y selecciona Todo en la lista Forma. Elige el comando DispStat y toca [INTRO] para introducir el comando en la ventana. Toca el botón [Ejec.] y observa el resultado. Aparece una pantalla con el resultado del cálculo estadístico. En ella se indica que el intervalo de confianza del 95% es (0.525, 0.715).



De forma similar se pueden plantear y resolver con la ClassPad 300 problemas relativos a muestras, tests de hipótesis, etc.

5. Conclusiones

Como hemos visto en las actividades anteriores, la ClassPad 300 es una buena herramienta para tratar los contenidos de Geometría y Estadística de ESO y Bachillerato. Una herramienta de aprendizaje que permite a los estudiantes aprender de forma individualizada, controlando resultados y corrigiendo errores. El uso significativo de esta calculadora es un entrenamiento para la vida profesional y pretende reforzar y asegurar las destrezas aritméticas, aplicar los conocimientos adquiridos a actividades interdisciplinarias, incluir modelizaciones e interpretaciones de problemas matemáticos.

La ClassPad 300 de Casio marca el principio de una nueva generación de herramientas de aprendizaje para las matemáticas, que permite a los estudiantes desarrollar su capacidad matemática con una relevancia significativa y usar los conceptos matemáticos en diversos contextos. La ClassPad 300 combina todas las

ventajas de una calculadora gráfica y algebraica con las de un PDA u ordenador de bolsillo manejado con lápiz táctil interactivo.

La ClassPad 300 de Casio presenta, entre otras muchas, la novedad de las denominadas e-actividades, hojas de trabajo electrónicas en las que se pueden insertar líneas de texto, cálculos aritméticos y algebraicos o enlaces de Geometría dinámica. Esta nueva herramienta permite utilizar la ClassPad como si fuera realmente un cuaderno de trabajo del alumno. De esta forma los profesores podemos utilizar la ClassPad como una fuente de documentación de ejemplos y problemas para los estudiantes, permitiendo rapidez en el aprendizaje autónomo e individualizado y animando a los alumnos a trabajar a su propio ritmo y de acuerdo con sus propios métodos de resolución. Podríamos decir que la ClassPad 300 dispone de opciones que le permiten sustituir al libro de texto, personalizándolo a la realidad de cada estudiante.

Algunas de las las nuevas características de la ClassPad 300 son: pantalla grande, teclados virtuales, sistema de menús desplegados, gráficos 3D, sistema geométrico dinámico, sistema CAS para el álgebra simbólica, creación de diapositivas, etc.

Con la opción de Geometría dinámica, la ClassPad 300 permite hacer dibujos y construcciones geométricas paso a paso, analizando el proceso seguido y, además, se pueden animar las figuras obtenidas. Se puede medir o modificar las coordenadas de puntos, la amplitud de ángulos, etc. La ClassPad 300 contiene además opciones para dibujar puntos, hallar puntos de intersección, dibujar bisectrices de ángulos, construir polígonos, trazar circunferencias y cónicas, etc. Por otra parte, la calculadora contiene herramientas de construcción para efectuar rotaciones, reflexiones o simetrías, traslaciones, dilataciones, contracciones, etc.

Con la ClassPad 300 es muy fácil construir lugares geométricos. Una vez obtenidos estos, es posible obtener automáticamente su ecuación, sin más que arrastrar la curva con el lápiz táctil desde la ventana de Geometría hasta la ventana de Álgebra. También se puede proceder a la inversa para representar un lugar geométrico conocida su ecuación.

También es posible dibujar cónicas y obtener sus elementos característicos (vértices, centro, focos, asíntotas, etc), así como representar superficies del tipo $z = f(x, y)$ en la pantalla 3D. Además, es posible dibujar curvas en coordenadas polares y paramétricas.

La ClassPad 300 permite representar fácilmente los datos de problemas reales, calcular medidas de centralización y dispersión, obtener parámetros de variables estadísticas, hallar ecuaciones de curvas de ajuste, etc. De esta forma es posible describir y analizar los datos estadísticos, sin que la preocupación fundamental resida en los cálculos, sino en la interpretación de los resultados.

La calculadora permite obtener con facilidad números combinatorios, factoriales, áreas bajo la curva normal y valores de la distribución binomial. Permite también generar números aleatorios y hacer simulaciones, seleccionar muestras, obtener estimaciones de parámetros, determinar intervalos de confianza, validar hipótesis, etc.

En suma, es ésta una potente máquina que, sin duda, será de gran utilidad para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

6. Bibliografía

- Todd, Ph., Siebold, M. y Maguire, B. (2002). *Obtención del máximo rendimiento de la ClassPad*. Saltire Software Inc., Beaverton OR. www.saltire.com.
- Gjon, G. y Andersen, T. (2003). *Shapes and Numbers. Mathematical Activities on ClassPad 300*. Casio Europe GmbH. www.casio-europe.com. Germany.
- Contreras, M. (2004). *Matemáticas con la ClassPad 300: una alternativa dinámica. Curso de formación*. Página web de la División Didáctica CASIO en www.flamagas.com.
- Página web de Abel Martín: www.classpad.tk.
- Manual del usuario de la ClassPad 300.