

LAS MATEMÁTICAS DE ESO Y BACHILLERATO A TRAVÉS DE LOS JUEGOS

3. JUEGOS DE PROBABILIDAD, ESTADÍSTICA Y ESTRATEGIA.

MAURICIO CONTRERAS

Introducción

La combinación del azar con diferentes reglas da lugar a un amplio abanico de juegos que pueden ser útiles tanto en los primeros contactos con el azar como para profundizar en su estudio.

Juegos como "Cuadrados y cubos" o "Elige números" presentan, con niveles de complejidad diferente, sucesos no equiprobables. Mientras que el primero es un juego puramente de azar, en el otro el jugador debe realizar una elección (estrategia) que le permita tener mayor o menor probabilidad de ganar. En él aparece un suceso imposible: la suma 1 al lanzar dos dados.

Sobre tableros se pueden simular procesos aleatorios como "El encuentro", "Paseos aleatorios" o "Lluvia aleatoria". En todos ellos el número de simulaciones (reuniendo los datos estadísticos de toda la clase, debe ser lo suficientemente elevado para que los resultados sean significativos.

Se puede analizar también cómo la combinación del azar con determinadas leyes (las reglas del juego) puede producir situaciones de indiferencia, equilibrio o inestabilidad. Juegos como "Vida y muerte", "Paseo aleatorio", "Equilibrio", "Catástrofe" y "Selección" son una muestra de ello –ver Eigen–Winkler, 1981, "Laws of the game", (Pengouin Books)–. Estos juegos son modelos que permiten estudiar el comportamiento de algunas poblaciones, en unos casos formadas por seres vivos (por ejemplo, "Selección"), en otros inorgánicos (por ejemplo, "Equilibrio").

Los juegos también permiten abordar problemas relativos a sorteos aleatorios que conducen inevitablemente al problema de la simulación y de la modelización. No puede haber simulación de un proceso aleatorio dinámico, si no se obtiene primero un buen modelo matemático contrastado con la realidad.

Por otra parte, numerosos juegos están relacionados con problemas combinatorios, relativos al número de caminos, número de elecciones, problemas de conteo, etc. Los conceptos de variaciones, combinaciones y permutaciones surgen así de modo natural en un contexto de juego.

Por último, hay que citar la importancia de analizar el trabajo con generadores aleatorios tales como dados y ruletas. Existe un buen número de dados poliédricos en el mercado (cúbicos, tetraédricos, octaédricos, etc), regulares y no regulares, así como ruletas de distintos tipos.

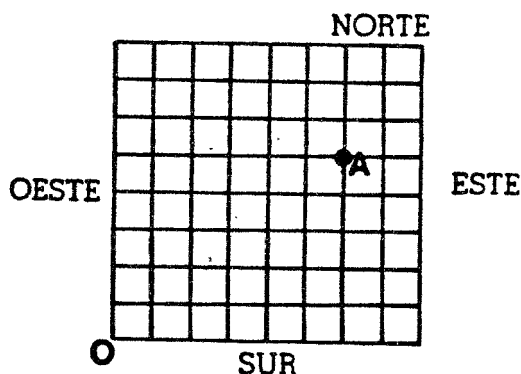
Estudiar cómo están contruidos estos generadores aleatorios y cómo aprovecharlos para efectuar sorteos pondrá de manifiesto conceptos tan importantes como el de equivalencia de sorteos y el de equiprobabilidad.

En definitiva, los juegos relacionados con el azar suponen un contexto natural donde se pueden introducir de manera sencilla los conceptos relativos al azar y la probabilidad.

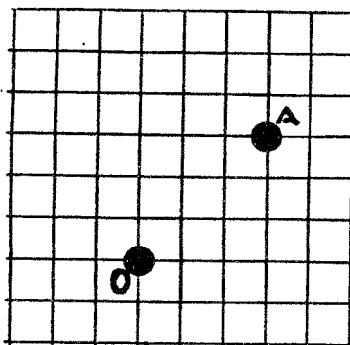
1. Juegos de probabilidad

- **PASEO ALEATORIO**

Una persona sale de un local situado en el punto O de la figura que sigue y decide volver a su casa situada en el punto A, siguiendo las direcciones Norte o Este, según salga cara o cruz al lanzar una moneda en cada esquina (las líneas de la figura representan calles). ¿Tiene muchas posibilidades de llegar a su casa?.

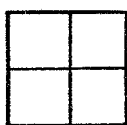


Este tipo de problemas admiten muchas versiones. Por ejemplo, se puede situar el origen en un punto interior de la trama y permitir que avance en las cuatro direcciones Norte, Sur, Este, u Oeste, según el resultado de un sorteo que se puede realizar con dos monedas, con un dado tetraédrico, con una tabla de números aleatorios,

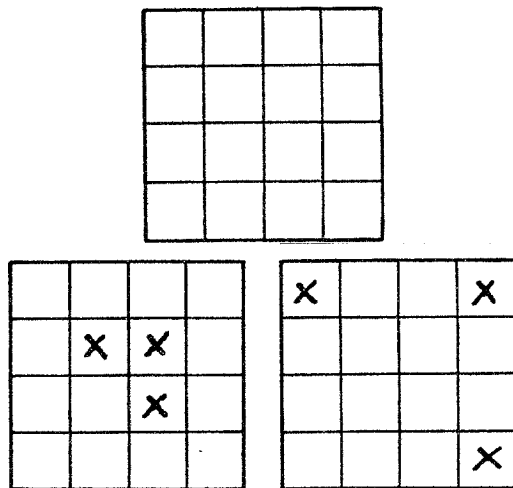


- **LLUVIA ALEATORIA**

- ¿Cómo elegirías al azar una casilla de la trama 2x2?. Pon un punto en la casilla elegida. ¿Cuántos puntos esperas que correspondan a cada casilla?. Repite la simulación 100 veces y comprueba tu conjetura.



- b) Si la trama consta de más cuadrados y sorteas entre ellos 100 puntos, ¿cuántos esperas que correspondan a cada uno de ellos?. ¿Y en tres cuadrados vecinos?. ¿Y en tres cuadrados no vecinos?.



• **ELIGE NÚMEROS**

Juego	ELIGE NÚMEROS
Tipo	Introducción a la Probabilidad
Material	Tableros, fichas y dos dados
Nº de jugadores	Dos
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Aproximarse al concepto de probabilidad. Buscar estrategias ganadoras

• **Descripción del material del juego.**

Un tablero con once filas marcadas del 2 al 12, de diez columnas cada una, con una columna final marcada como Meta; dos dados normales, diez fichas, cinco de cada color.

2												.
3												.
4												A
5												.
6												T
7												.
8												E
9												.
10												M
11												.
12												.

- **Reglas del juego**

Es un juego para dos jugadores, cada uno de los cuales tiene cinco fichas de un color distinto.

- Empieza un jugador cada vez. Elige uno de los números de 2 a 12 y pone allí una ficha de su color; a continuación elige el otro jugador otro número y coloca allí una de sus fichas. Continúan alternativamente hasta haber elegido cada uno de ellos cinco números; quedará uno de los once números sin elegir.
- Por orden van tirando los dos dados; si la suma de los dos dados coincide con el número elegido por una de sus fichas, la avanza un lugar en su fila; si sale el número que no ha escogido ninguno de los dos jugadores, elige de entre sus fichas la que quiera y la avanza una casilla.
- Gana el primer jugador que consiga llegar con una cualquiera de sus fichas a la Meta.

- **Posibles variantes**

- Uno de los dos jugadores (por turno) elige seis filas y el otro cinco; solo se mueven en el caso de que la suma de los dados corresponda a una de sus fichas.
- Se puede ampliar el número de jugadores a 3, y quedarán dos filas libres.
- Se puede añadir la fila 1, y cada uno de ellos elige seis filas.

- **Objetivos**

- Aproximarse intuitivamente al concepto de probabilidad, mediante pruebas.
- Comprobar que no todos los resultados aparecen siempre el mismo número de veces (es decir, que no todos los resultados son equiprobables).
- Buscar estrategias en la elección de los números que permitan ganar con más facilidad.

- **Observaciones**

Es interesante que antes de pasar a la fase de análisis o a sacar conclusiones se hayan jugado varias partidas y se observe (y a ser posible se anote, para poder sumarlas luego) la situación en que quedan cada una de las fichas. Con varias partidas de cada grupo y sumando los resultados (aún en el caso de que haya una fila libre, ya que en el caso de que salga dicha fila se mueve otra fila cualquiera) se obtiene una muy buena aproximación a la probabilidad de cada uno de los resultados.

Se puede discutir también (o hacerlo después) la distorsión que produce la fila libre y las maneras posibles de evitarla (que uno de los jugadores por turno elige seis filas; añadir la fila del 1; etc). Se puede jugar con la elección que se haga y comprobar las distorsiones que se producen en el juego.

- **EL DADO GANADOR**

Juego	EL DADO GANADOR
Tipo	Introducción a la probabilidad
Material	Dados tetraédricos
Nº de jugadores	Dos
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Estudiar las posibilidades de una situación. Introducir la noción de probabilidad.

- **Descripción del material del juego.**

Se necesitan tres dados tetraédricos (que pueden ser sustituidos por tres regletas alargadas de base cuadrada) con las numeraciones siguientes en sus caras:

Dado A: 6 – 3 – 3 – 3

Dado B: 5 – 5 – 2 – 2

Dado C: 4 – 4 – 4 – 1

- **Reglas del juego**

Es un juego para dos jugadores. Uno de ellos elige uno de los dados; el otro jugador elige uno de los dos restantes y los lanzan. Gana el jugador que obtiene mayor puntuación.

Después de jugar algunas partidas se trata de poder responder a las preguntas:

- Si eres el primer jugador, ¿qué dado debes elegir?
- Si eres el segundo jugador, ¿qué dado debes elegir, teniendo en cuenta el que ha sido elegido?
- ¿Es un juego equitativo (es decir, hay la misma probabilidad de ganar siendo el primero que el segundo en elegir)?
- Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, ¿existe alguna evaluación de las diferencias entre las dos opciones? ¿Depende de los dados que se elijan?

- **Objetivos**

- Estudiar las posibilidades de una situación. Se trata de hacer un estudio de las posibilidades de ganar con cada dado en los enfrentamientos de cada dos (lo que se puede hacer con diagramas de árbol, por ejemplo). Así resulta que de las 16 posibilidades (4 caras de cada uno de los dos dados) de resultados en los enfrentamientos entre A y B, A gana por término medio en 10 de ellos y B en los 6 restantes. Si son B y C, B gana 10 veces y C 6. Y si son C y A, C gana en 9 ocasiones y A en 7. Tenemos por consiguiente una curiosa situación no transitiva: A gana a B, B gana a C y C gana a A.

- Introducir la noción de probabilidad. La probabilidad mínima de ganar siendo el segundo jugador, según el análisis anterior, es de $9/16$ si el primer jugador ha elegido el dado A; en las otras dos posibles elecciones, la probabilidad es de $10/16$.

- **Observaciones**

Para poder llegar a respuestas generales será procedente que los alumnos jueguen durante algún tiempo eligiendo como quieran. Después de algunas partidas, deberán elegir entre ellos quién quiere ser el primero o el segundo.

Después de esta fase, es conveniente enfrentar los dados de dos en dos y apuntar los resultados, antes de pasar al estudio de casos.

Hay que destacar la no transitividad de los resultados, porque es un hecho que parece ser contrario a la lógica.

Se puede relacionar con la "paradoja de Condorcet", que es del mismo tipo. Tenemos tres ruletas divididas en tres sectores iguales. En la primera hay, en cada uno de los sectores, un 3, un 5 y un 7; en la segunda 2, 4 y 9; y en la tercera 1, 6 y 8. La primera gana a la segunda (en el sentido de que es mayor del 50% la probabilidad de ganar), la segunda a la tercera y la tercera a la primera. Tampoco hay transitividad de resultados.

- **EL FERIAANTE VENTAJISTA**

Juego	EL FERIAANTE VENTAJISTA
Tipo	Introducción a la probabilidad
Material	Tres fichas especiales
Nº de jugadores	Dos
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Estudiar las posibilidades de una situación. Introducir la noción de probabilidad.

- **Descripción del material del juego.**

Tres fichas. Una de ellas blanca por las dos caras, otra con las dos caras negras y la tercera con una cara blanca y la otra negra (pueden fabricarse con fichas de dos colores y a una de ellas pegando un gomet del otro color).

- **Reglas del juego**

Las tres fichas están en un recipiente opaco. Uno de los jugadores saca una de las fichas enseñando una de las caras, y tapando la otra, y se apuesta por el color de la cara oculta. Gana el que acierta el color de la cara oculta de la ficha.

Tras jugar algunas partidas, trata de responder a las preguntas:

- ◆ ¿Es un juego equitativo (es decir, da lo mismo apostar por uno que por otro color, con independencia del color que haya salido)?

- ◆ Si no lo es, ¿por qué color hay que apostar?. ¿Cómo evaluar las posibilidades de ganar en cada opción?.

- **Posibles variantes**

El nombre de "El feriante ventajista" viene de la versión habitual del juego, en la que un feriante, con las fichas como hemos descrito, elegía una y apostaba siempre porque la otra cara era del mismo color que la que salía. Aparentemente es un juego equitativo, pero en realidad no lo es, de ahí el apelativo de "ventajista".

- **Objetivos**

- Estudiar las posibilidades de una situación. Parece que si ha salido cara blanca, por ejemplo, la posibilidad de que sea blanca o negra es la misma. Pero no es así. Hay seis casos posibles de sacar una cara (dos por cada una de las tres fichas); de ellos en tres casos es blanca (y los otros tres negra). De esos tres casos, en dos la otra cara también es blanca, y sólo en el tercero es negra.
- Introducir la noción de probabilidad. La probabilidad de que sea del mismo color que la cara mostrada es de $2/3$ (y, por consiguiente, que sea del contrario es $1/3$).

- **Observaciones**

Es difícil para los alumnos, por razonamientos teóricos, negar esa presunta evidencia de que "hay dos fichas una de cuyas caras es blanca (o negra); si ya ha salido una de ellas, es igual de probable que la otra sea blanca o negra". Pero haciendo varias veces el juego y contando los resultados, se ve que es aproximadamente doble de probable ganar apostando por el mismo color que por el contrario. Y entonces hay que pasar al análisis. Y se le puede dar la vuelta al presunto razonamiento anterior con el de que "hay tres fichas, dos con las mismas caras y otra con caras distintas". Así se puede llegar a numerar las caras de las fichas y ver que hay seis posibilidades. De las tres que ha salido blanca (negra), en dos es blanca (negra) la otra cara y en una es negra (blanca). Luego la probabilidad de que sea del mismo color es $2/3$.

- **SALTOS DE CANGURO**

Juego	SALTOS DE CANGURO
Tipo	Juego de tablero
Material	Tablero, monedas y fichas
Nº de jugadores	Variable, preferiblemente cuatro
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Repasar conocimientos

- **Descripción del material del juego.**

Se necesitan un tablero como el siguiente, monedas y fichas para cada jugador.

0										–
1										M
2										E
3										T
4										A
5										–

• **Reglas del juego**

Tiramos cinco monedas iguales y contamos el número de caras que salen. El canguro que lleve ese número salta una casilla. Gana el primero que haga diez saltos.

¿Por cuál apostarías como ganador?. ¿Y por los siguientes?. Juega algunas partidas para comprobar o cambiar la predicción que habías hecho.

• **Objetivos**

- Introducir el concepto de probabilidad.
- Estudiar los casos posibles.

• **QUITANDO FICHAS**

Juego	QUITANDO FICHAS
Tipo	Tablero/probabilidad
Material	Tablero y fichas
Nº de jugadores	Dos
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Introducir el concepto de probabilidad. Estudiar los casos posibles.

• **Descripción del material del juego.**

Un tablero con doce casillas numeradas del 2 al 12. Fichas de dos colores. Dos dados cúbicos normales.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

- **Reglas del juego**

Es un juego para dos jugadores. Cada uno de ellos tiene once fichas de un color y puede colocarlas como quiera en las casillas 2 a 12 (todas en la misma casilla, una en cada una o cualquier situación intermedia). Por turno, cada uno de los jugadores tira los dos dados y quita (si hay) una ficha de su color de la casilla que indica la suma de los resultados. Gana el jugador que primero ha quitado todas sus fichas.

- **Posibles variantes**

- Se puede variar el número de fichas a disposición de cada uno.
- Con la misma dinámica, pero hallando la diferencia de los dados. Se necesita un tablero con seis casillas, numeradas de 0 a 5.

- **Objetivos**

- Introducir el concepto de probabilidad.
- Estudiar los casos posibles.

- **Observaciones**

Se trata de buscar la mejor colocación para las fichas pensando también en otros juegos anteriores. Y de que jueguen algunas partidas para comprobar su distribución.

- **PARES E IMPARES**

Juego	PARES E IMPARES
Tipo	Dados/probabilidad
Material	Dados
Nº de jugadores	Dos
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Introducir el concepto de probabilidad. Estudiar los casos posibles.

- **Descripción del material del juego.**

Dos dados cúbicos.

- **Reglas del juego**

Es un juego para dos jugadores. Tenemos dos dados, los lanzamos a la vez y calculamos la suma de los resultados que aparecen. Si es par gana uno de los dos; si es impar el otro.

Si se puede elegir, ¿por cuál lo harías?. ¿Es indiferente?. Juega algunas partidas para comprobarlo.

- **Posibles variantes**

La misma mecánica que en el caso anterior, pero ahora multiplicamos los resultados (en vez de sumarlos como antes). Tú que elegirías, ¿par o impar?. Juega varias partidas para comprobarlo.

- **Objetivos**

- Introducir el concepto de probabilidad.
- Estudiar los casos posibles.

- **Observaciones**

El juego es equiprobable. No pasa así con la variante, puesto que para conseguir un producto impar, tiene que salir un resultado impar en los dos dados, mientras que para que sea par basta con que lo sea uno de los dos. Por tanto, es mejor elegir resultado par.

- **LAS CARAS**

Juego	LAS CARAS
Tipo	Tablero/probabilidad
Material	Tablero, fichas y monedas
Nº de jugadores	Tres
Referencias	
Nivel	Desde primer curso de ESO
Objetivos	Hacer recuentos. Asignar probabilidades.

- **Descripción del material del juego.**

Un tablero con la salida, la meta y 30 casillas. Una moneda menos que el número de jugadores. Una ficha de color diferente para cada jugador.

- **Reglas del juego**

Es para tres jugadores. Cada uno de ellos coloca su ficha en la salida.

- Cada uno de los jugadores elige el que salgan dos, una o ninguna cara. Si hay dos o más jugadores que quieren hacer la misma elección se sortea entre ellos.
- Por turnos van tirando las dos monedas. Avanza una casilla el jugador que haya hecho la elección del número de caras que haya salido. Por ejemplo, si salen las dos caras avanza un lugar quien lo haya elegido; el resto de los jugadores continúa en su casilla. El orden de llegada a la meta es el del juego.

Si en algún momento (después de jugar varias partidas o en la primera) crees que las reglas no son justas, ¿cómo habría que cambiarlas para igualar las posibilidades de ganar de todos los jugadores?. Comprueba tu hipótesis jugando con esas reglas.

SA	LI	DA

- **Posibles variantes**

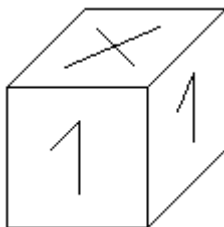
Se puede aumentar hasta cinco el número de jugadores y utilizar entonces un número de monedas igual a una menos que los jugadores. Cada uno de ellos elige un número diferente de caras. En este caso, hay que aumentar el número de casillas del tablero.

- **Objetivos**

- Hacer recuentos.
- Asignar probabilidades. Se trata de poder decidir cómo cambiar las reglas en función de las posibilidades de cada caso. Por ejemplo, en el caso de tres jugadores, que los que hayan elegido 0 ó 2 caras avancen dos casillas cuando salga su elección.

- **DADOS DE HACER QUINIELAS**

En el mercado existen dados para rellenar quinielas al azar. Obsérvalos. ¿Crees que la distribución 1, X, 2 es la apropiada?



En las tablas que siguen se dan los resultados obtenidos durante una temporada futbolística. Te ayudarán sin duda a precisar tus opiniones.

Jornada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4	9	11	10	8	9	10	8	9	5	9
X	4	3	2	2	4	4	4	4	5	6	3
2	6	2	1	2	2	1	0	2	0	3	2

Jornada	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	5	7	4	7	6	8	6	7	7	4	6
X	6	5	9	3	4	2	7	4	5	6	6
2	3	2	1	4	4	4	1	3	2	4	2

Jornada	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	6	9	4	8	6	7	7	10	5	5	8
X	4	2	6	3	4	2	2	1	8	7	4
2	4	3	4	3	4	5	5	3	1	2	2

Jornada	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
1	6	7	8	5	5	8	4	7	5	8	7
X	6	5	4	6	4	4	9	4	6	6	6
2	2	2	2	3	5	2	1	3	3	0	1

El quinielómetro, ordenador de los pobres, es una especie de sonajero que al agitarlo produce una nueva quiniela (15 resultados).

1	2	1	X	2	1	1	X	1	1	X	1	1	X	2
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

- ¿Cuántas quinielas se pueden hacer?
- ¿Cuántas quinielas se pueden hacer con un partido fijo?
- ¿Y con dos partidos fijos?
- ¿Y si apostamos por tres partidos fijos?
- ¿Y cuatro? ¿Y cinco?

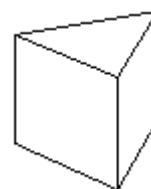
Utiliza un dado de hacer quinielas para construir una quiniela. Cuenta el número de unos, equis y doses. Recoge la información obtenida en tu clase. Construye una tabla de frecuencias como la siguiente:

RESULTADO	RECuento	FRECUENCIA
1		
X		
2		

Compara los resultados obtenidos en tu clase con la proporción entre unos, equis y doses de una quiniela real.

• **UN PRISMA TRIANGULAR DE MADERA**

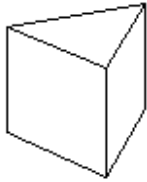
No todos los dados son regulares. Aquí tienes uno que no lo es.



- 1) ¿Hay equiprobabilidad entre las caras?. El dado ¿muestra algún sesgo?.
- 2) Al lanzar este prisma triangular, ¿qué es más fácil, obtener una cara triangular o una rectangular?. Suponiendo que un jugador apuesta por rectángulo y su contrario por triángulo, ¿en qué proporción deben hacerse las apuestas para que el juego sea equitativo?.

Para verificar tu conjetura, puedes efectuar una tanda de 20 lanzamientos del dado, anotando los resultados de cada lanzamiento. ¿Cuándo sale rectángulo?. ¿Cuándo sale triángulo?. ¿Qué criterio eliges para decidir si sale una cosa u otra?.

Recoge la información obtenida en tu clase en una tabla como la siguiente:

	CARA	RECuento	FRECUENCIA
	triángulo		
	rectángulo		

¿De qué crees que depende el hecho de que salga triángulo o rectángulo?. Si piensas que en todo este asunto tiene que ver el área de cada cara, compara las áreas de triángulo y rectángulo. ¿Cómo puedes hacerlo?.

- 3) ¿Qué ocurre si se varían las dimensiones del prisma?.
- 4) ¿Se puede construir un dado prismático en que la cara triangular tenga igual probabilidad de salir que la rectangular?. ¿Y de que tenga doble probabilidad?.

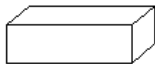
• **PRISMAS DE MADERA**

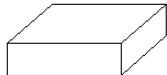
Se admiten apuestas: Lanzamos un dado prismático que consta de dos cuadrados y cuatro rectángulos. Disponemos de dos tipos de estos dados: uno con cuadrados pequeños y otro con cuadrados grandes:



En cada uno de los dados anteriores, ¿qué es más fácil, que salga cuadrado o que salga rectángulo?. ¿En qué proporción deberían hacerse las apuestas en cada dado para que el juego sea equitativo?.

Para verificar tus conjeturas, efectúa con cada dado una tanda de 20 lanzamientos, anotando los resultados de cada lanzamiento. Recoge la información obtenida en tu clase en dos tablas como éstas:

	CARA	RECuento	FRECUENCIA
	cuadrado pequeño		
	rectángulo		

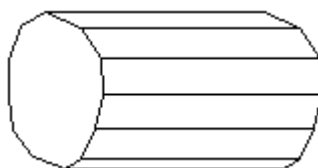
	CARA	RECuento	FRECUENCIA
	cuadrado grande		
	rectángulo		

¿Qué conclusiones obtienes?.

Compara en cada dado las áreas de "cuadrado" y "rectángulo". ¿Cómo puedes hacerlo?. ¿De qué depende, pues, la frecuencia de "cuadrado" o de "rectángulo"?

• **DADO PRISMÁTICO**

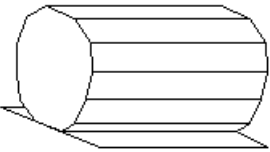
Al lanzar un dado prismático, es razonable pensar que la probabilidad de obtener una cara es proporcional a su superficie; pero, imaginemos por un momento que cambiamos el prisma triangular por este otro casi cilíndrico:



- 1) ¿Qué es más fácil que caiga sobre una de las caras laterales o sobre una de las bases?. Efectúa 50 lanzamientos, anota los resultados, recoge la información obtenida en tu clase y comprueba tu conjetura.

Observa que al lanzar este dado es muy probable que caiga sobre una de las caras laterales. Sin embargo, la superficie de esa cara es muy pequeña.

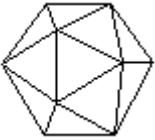

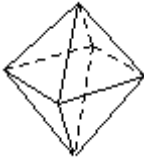
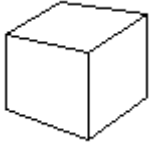
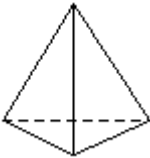
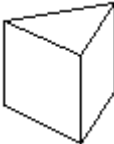
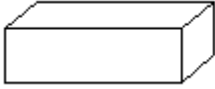
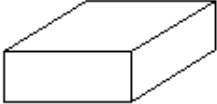
Entonces, cuando hablamos de superficie, ¿a qué superficie nos referimos, a la de la cara que queda en contacto con el suelo o a la de la proyección del prisma sobre éste?.



- 2) ¿Es posible diseñar dos dados prismáticos que tengan la misma superficie lateral y la misma superficie en las bases y que exhiban comportamientos aleatorios distintos?.

• **DADOS POLIÉDRICOS I**

En el mercado existen muchos tipos de dados. Aquí tienes unos cuantos:

			
ICOSAEDRO	DODECAEDRO	OCTAEDRO	CUBO
			
TETRAEDRO	PRISMA TRIANGULAR	PRISMAS DE BASE CUADRADA	

- a) Observa detenidamente cómo están distribuidos los puntos y números en las caras de cada dado. ¿Observas algo interesante?. ¿Por qué crees que se han construido de esa forma?.
- b) En cada uno de los dados anteriores, cuenta el número de caras, vértices y aristas. ¿Cómo puedes hacerlo?.
- c) ¿Cuántas veces has de lanzar un dado cúbico para obtener un 6?. ¿Y un octaedro?. ¿Y un dodecaedro?.

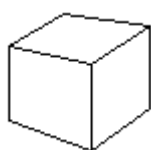
Para averiguarlo, puedes realizar la siguiente experiencia: lanza cada uno de los dados anteriores hasta que te salga un 6 y cuenta el número de lanzamientos que has necesitado. Repite esta experiencia 10 veces. La información obtenida en tu clase, puedes recogerla en una tabla como la siguiente:

DADO	Nº DE LANZAMIENTOS	RECUENTO	FRECUENCIA
CUBO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	más de 7 ()		
OCTAEDRO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	más de 10 ()		
DODECAEDRO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	11		
	12		
	13		
	más de 13 ()		

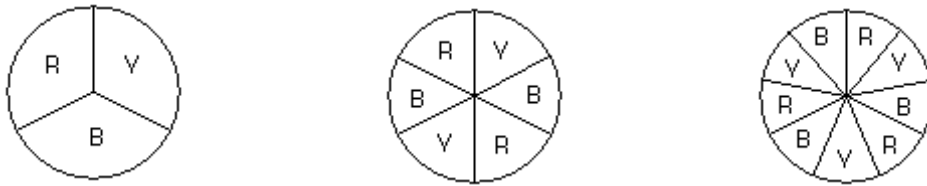
Halla la media aritmética en cada caso. ¿Qué conclusiones obtienes?.

• **DADOS Y RULETAS**

- 1) Realizar un sorteo entre seis personas con un dado cúbico es cosa fácil, pero ¿qué podemos hacer si sólo disponemos de un dado dodecaédrico?.

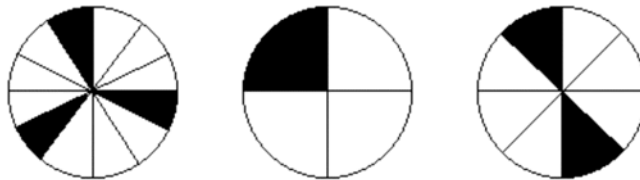


- 2) ¿Cuál de estas ruletas es mejor para realizar un sorteo entre tres personas?

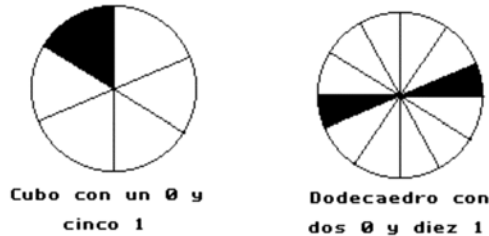


- 3) Toma un dado regular cualquiera y numera sus caras al azar con 0 y 1. Construye una ruleta equivalente a ese dado.

Observa que la misma distribución de 0 y 1 en un dado puede tener asociadas distintas ruletas equivalentes. Así, tres 0 y nueve 1 sobre las caras de un dado dodecaédrico puede dar lugar a cada una de las siguientes ruletas:

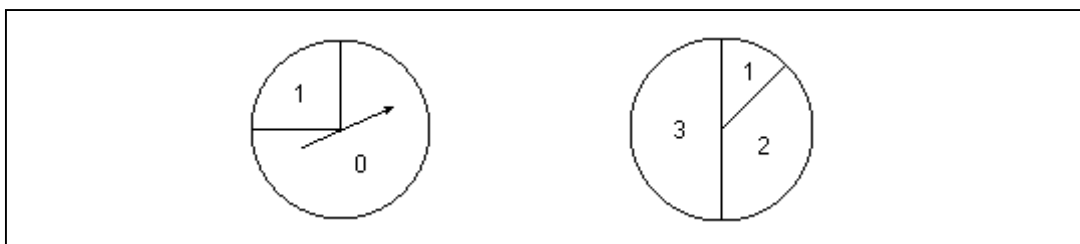


Al mismo tiempo, distribuciones de ceros y unos sobre dados diferentes pueden dar lugar a ruletas equivalentes:



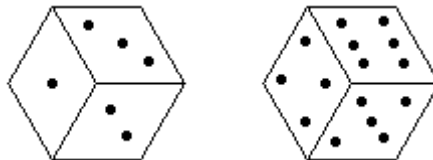
Observa en las actividades anteriores la equivalencia entre sorteos aleatorios, probabilidades, porcentajes y fracciones, así como la utilidad de la analogía como estrategia para la resolución de problemas.

- 4) Utilizando ruletas, dados, bolas de diferentes colores, urnas u otros materiales, ¿cómo se pueden realizar sorteos entre dos personas equivalentes al lanzamiento de una moneda?
- 5) ¿Qué urnas son equivalentes a las siguientes ruletas?



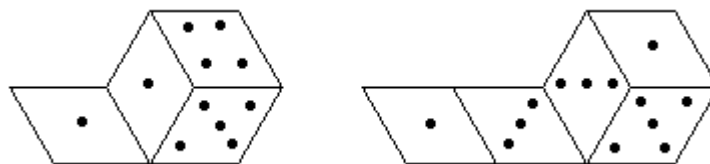
• **DADOS CÚBICOS**

- 1) Toma un dado cúbico y observa detenidamente la distribución de los puntos en sus caras. ¿Ocurre algo interesante?. Fíjate bien en las caras opuestas, así como en las tres caras que concurren en un vértice. ¿Qué observas?.

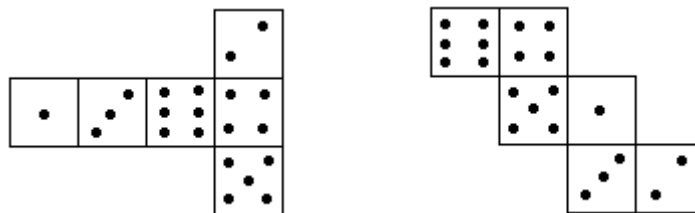


Los dados que se venden en el mercado están contruidos de manera que la suma de caras opuestas es 7 y están "orientados a derecha". ¿Existe alguna razón para que se fabriquen así?.

- 2) Para obtener el desarrollo plano de un dado cúbico basta apoyar las caras del dado sobre el papel y dibujar su contorno con un lápiz; después haz girar el dado sobre cada arista, sin que se deslice y vuelve a repetir la operación, sin dibujar dos veces una misma cara.



Aquí tienes dos posibles desarrollos planos de un dado cúbico:



Utiliza este procedimiento para dibujar otros desarrollos planos de un dado cúbico.

- 3) Sobre tres de las caras de un dado cúbico se escribe un 0 y sobre las otras tres un 1. Sobre dos de las caras de otro dado cúbico se escribe un 0 y sobre las otras cuatro un 1. ¿Es lo mismo jugar con un dado que con otro al juego de "cara o cruz"?.

Para confirmar tu conjetura, realiza 20 lanzamientos con un dado de cada tipo y anota los resultados. Recoge la información obtenida en tu clase en una tabla como la que sigue:

3 ceros y 3 unos

		0	
0	1	1	0
		1	

RESULTADOS	RECuento	FRECUENCIAS
1		
0		

2 ceros y 4 unos

		1	
0	1	0	1
		1	

RESULTADOS	RECuento	FRECUENCIAS
1		
0		

¿Qué conclusiones obtienes de esta tabla?

4) Hemos lanzado ambos dados 120 veces y hemos obtenido las siguientes series:

PRIMERA SERIE

1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0

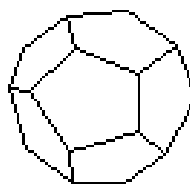
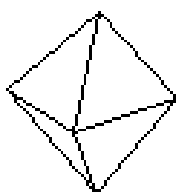
SEGUNDA SERIE

1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0

¿Qué dado puede ser el que tiene igual número de 0 y 1, el de la primera serie o el de la segunda?. ¿Qué dado puede ser el que tiene dos ceros y cuatro unos, el primero o el segundo?.

• **DADOS POLIÉDRICOS II**

1) Sobre cuatro de las caras de un dado octaédrico se escribe un 1 y en las restantes un 0. Sobre tres de las caras de un dado dodecaédrico se escribe un 1 y en las restantes un 0. ¿Es lo mismo jugar con una dado que con otro al juego de "cara o cruz"?



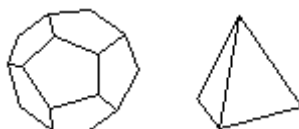
Para confirmar tu conjetura, efectúa 20 lanzamientos con cada dado y anota los resultados obtenidos. La información obtenida en tu clase, puedes recogerla en la siguiente tabla:

OCTAEDRO CUATRO 1 / CUATRO 0	RESULTADOS	RECuento	FRECUENCIAS
	1		
	0		

DODECAEDRO TRES 1 / NUEVE 0	RESULTADOS	RECuento	FRECUENCIAS
	1		
	0		

¿Qué conclusiones obtienes?. ¿Qué habría que hacer para que fuese igual jugar con uno u otro dado al juego de "cara o cruz"?

- 2) Dispones de un dado dodecaédrico con tres "unos" y nueve "ceros". Si sale "uno" ganas; si sale "cero" pierdes. ¿Podrías jugar este juego si en vez de un dado dodecaédrico dispusieses de un dado tetraédrico?. ¿Cuántos "ceros" y cuántos "unos" debería tener el tetraedro para que fuese lo mismo jugar con uno u otro dado?.



- 3) Se lanza un dado icosaédrico (poliedro de 20 caras, triángulos equiláteros). Sus caras están numeradas con 0 y 1, pero desconocemos la proporción. Después de 120 lanzamientos construimos la siguiente serie:

0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

¿Cómo están distribuidos los 0 y 1 en el dado?.

2. Juegos de azar y de estrategia

• CUADRADOS Y CUBOS

Es un juego para dos jugadores.

- Descripción del material del juego.
- Nueve fichas para cada jugador.
- Un dado.

- **Reglas del juego**

Se sortea quien sale.

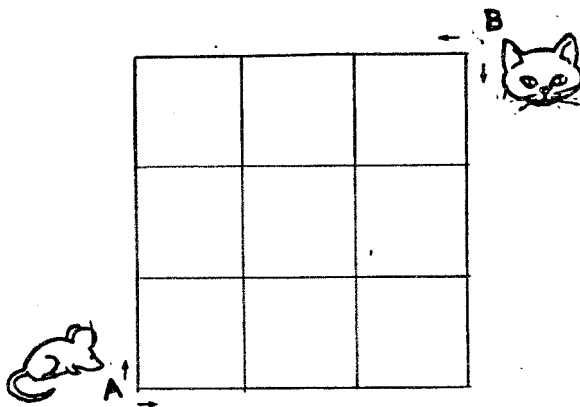
- El primer jugador lanza un dado y mira el número que le sale. Calcula su cuadrado y pone una ficha en una casilla con ese número.
- Después le toca el turno al otro jugador, que hace lo mismo. Cuando la casilla ya está ocupada, el jugador pasa.
- Se termina la partida cuando el tablero está completo. Gana el jugador que haya colocado más fichas.
- Se puede repetir el mismo juego calculando el cubo de cada número.

4	36	16
25	1	25
16	36	9

8	216	64
125	1	125
64	216	27

- **EL ENCUENTRO**

Las líneas de una trama cuadrada van a representar calles. Sobre una como la que sigue, un ratón y un gato inician un paseo aleatorio.



El ratón sale de A y sólo puede avanzar hacia la derecha y hacia arriba; el gato sale de B y sólo puede ir hacia la izquierda y hacia abajo. Ambos van a la misma velocidad y en cada cruce avanzan al azar por uno de los dos caminos posibles.

Si el gato encuentra al ratón, se lo come.

¿Se admiten apuestas!. ¿Se comerá el gato al ratón?. ¿Es justo que apuesten en la misma cantidad los que dicen que sí que los que dicen que no?.

Simula este juego con diversos tamaños de la retícula cuadrada y extrae consecuencias.

3. Iteración del azar y de las leyes

- **VIDA Y MUERTE**

Este es un juego para un solo jugador. Con él se simula la evolución de poblaciones de seres vivos según las condiciones de su entorno. Para jugar necesitas un tablero con muchas casillas (por ejemplo, uno de 20×20) y fichas de dos colores en cantidad.

- 1) Para empezar sitúa sobre el tablero tantas fichas como desees (una por casilla y todas del mismo color), con la forma que quieras. Esa será la población inicial o generación 0. Cada ficha puede tener hasta ocho vecinas.

•	•	•
•	×	•
•	•	•

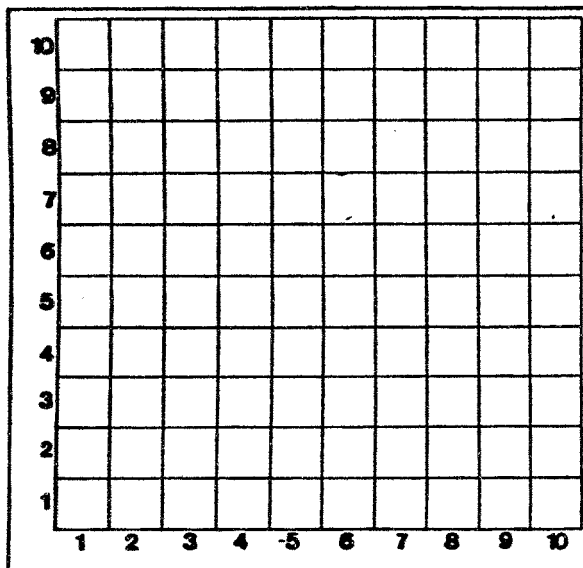
- 2) En cada fase o generación, se aplican a todas las casillas las siguientes reglas, en el orden en que se presentan:
 - I. **SUPERVIVENCIA:** Una ficha sobrevive a la siguiente generación si tiene exactamente dos o tres vecinas.
 - II. **NACIMIENTO:** Nace una ficha en una casilla vacía si tiene exactamente tres vecinas. Para los nacimientos se utilizan las fichas del segundo color, con el fin de que no se tengan en cuenta en la etapa de las muertes.
 - III. **MUERTES:** Una ficha es eliminada si tiene más de tres vecinas (superpoblación) o menos de dos (aislamiento). Una vez eliminadas las fichas que mueren, se sustituirán las fichas que nacieron, del segundo color, por fichas del color principal.

Estudia diferentes configuraciones iniciales de fichas, buscando estabilidad, regularidades, etc.

- **PASEO ALEATORIO**

Es un juego para dos jugadores.

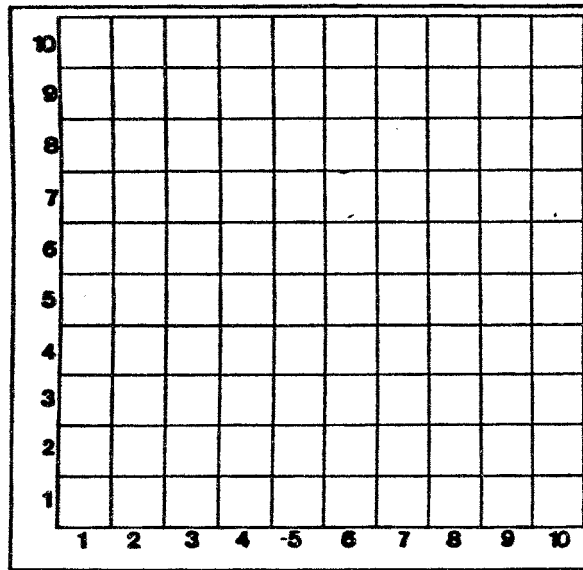
- **Descripción del material del juego.**
- Tablero 10×10.
- Una moneda.
- Fichas de dos colores.



- **Reglas del juego**
- **Versión 1**
- Cada jugador llena con sus fichas la mitad del tablero que le corresponde y elige, para todo el juego, una de las dos caras de una moneda.
- En cada lanzamiento de la misma, el jugador afortunado sustituye una ficha cualquiera de su contrario por una de las suyas.
- El número de lanzamientos de que constará el juego se fija arbitrariamente al comienzo.
- Gana el que al final tenga más fichas sobre el tablero.
- **Versión 2**
- Además de las reglas de la versión 1 se introduce una regla cooperativa: un jugador puede reemplazar, en el tablero, cualquier ficha de su oponente que tenga completamente rodeada.
- El juego termina cuando el tablero está cubierto por fichas de un solo color.
- **EQUILIBRIO**

Es un juego para dos jugadores.

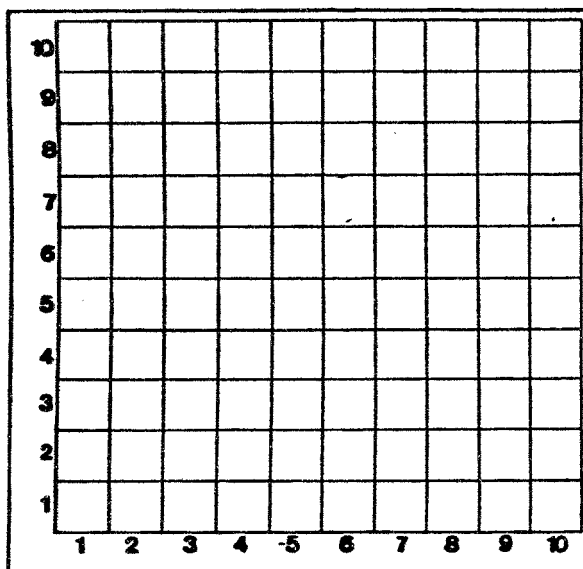
- **Descripción del material del juego.**
- Tablero 10×10.
- Dos dados adecuados
- Fichas de dos colores.



- **Reglas del juego**
- **Versión 1**
- Los dos jugadores, por turno, colocan al azar sus fichas sobre el tablero hasta que todas las casillas estén cubiertas.
- Se lanzan los dos dados. La ficha seleccionada se reemplaza por una del otro color.
- El final del juego se fija arbitrariamente.
- **Versión 2**
- Las reglas del juego son básicamente las mismas pero comienza con el tablero completamente lleno de fichas de un solo color.
- **CATÁSTROFE**

Es un juego para dos jugadores.

- **Descripción del material del juego.**
- Tablero 10×10.
- Dos dados adecuados
- Fichas de dos colores.

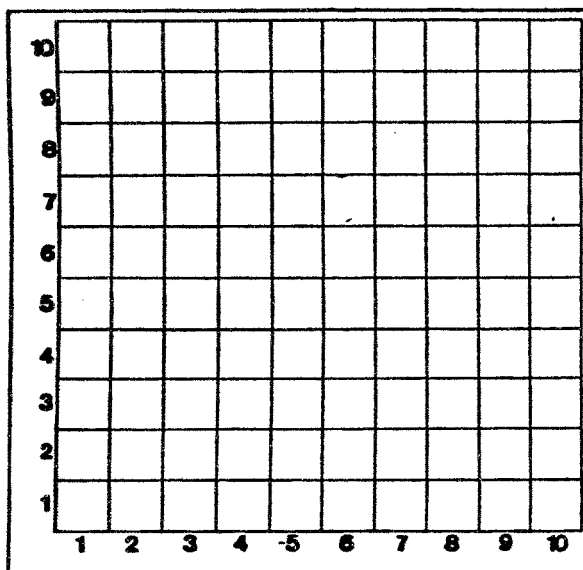


- **Reglas del juego**
- Los dos jugadores, por turno, colocan al azar sus fichas sobre el tablero hasta que todas las casillas estén cubiertas.
- Se lanzan los dos dados. La ficha seleccionada se dobla a expensas del otro color. Por ejemplo, si la ficha seleccionada es blanca, se quita una negra del tablero y se coloca en su lugar una blanca.

- **SELECCIÓN I**

Es un juego para dos jugadores.

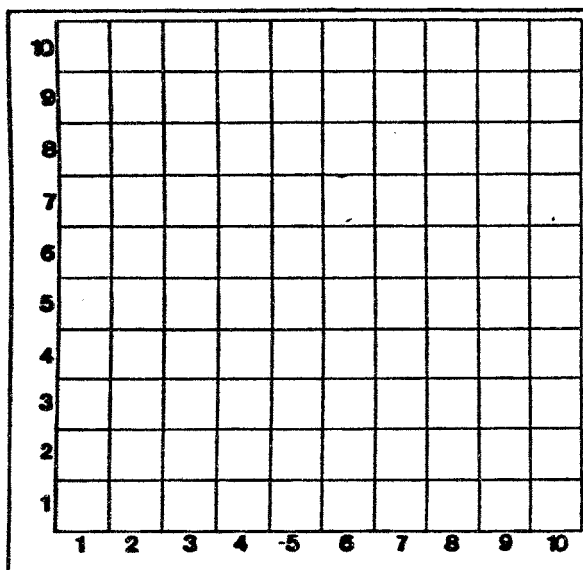
- **Descripción del material del juego.**
- Tablero 10×10.
- Dos dados apropiados (dados de coordenadas o dados decimales de 10 caras)
- Fichas de cuatro colores.



- **Reglas del juego**
- Al comienzo del juego se sitúan al azar y en igual número los 4 tipos de fichas.
- Se lanzan 2 veces un par de dados, aplicándose alternativamente las 2 reglas siguientes:
 - 1) **MUERTE:** Se elimina del tablero la ficha elegida por los dados en el primer lanzamiento.
 - 2) **REPRODUCCIÓN:** Se dobla la ficha elegida por los dados en el segundo lanzamiento, es decir, se toma de la reserva una ficha del mismo color y se sitúa en la casilla liberada por el lanzamiento previo de los dados.
- El juego se termina cuando todo el tablero está cubierto de fichas de un solo color.
- **SELECCIÓN II**

Es un juego para cuatro jugadores.

- **Descripción del material del juego.**
- Tablero 10×10.
- Dos dados adecuados ("dados de coordenadas").
- Un dado cúbico ("Dado de valores")
- Fichas de cuatro colores.



- **Reglas del juego**
- Los cuatro jugadores, por turno, colocan al azar sus fichas sobre el tablero, hasta que todas las casillas estén cubiertas.
- A los distintos colores se les asigna valores: Esto significa que las tasas medias de nacimientos y muertes variarán de un color a otro. Para ello, se lanzan dos veces, y juntos, los dados de coordenadas y el de valores, una para reproducción y otra para muerte, aplicándose las reglas de la tabla adjunta:

Si la ficha seleccionada por los dados de coordenadas es:	Entonces se quita o se añade una ficha de acuerdo con los siguientes números del dado de valores:	
	Muerte	Reproducción
Roja	1	1, 2, 3, 4, 5, 6
Azul	1, 2	1, 2, 3
Verde	1, 2, 3	1, 2
Amarilla	1, 2, 3, 4, 5, 6	1

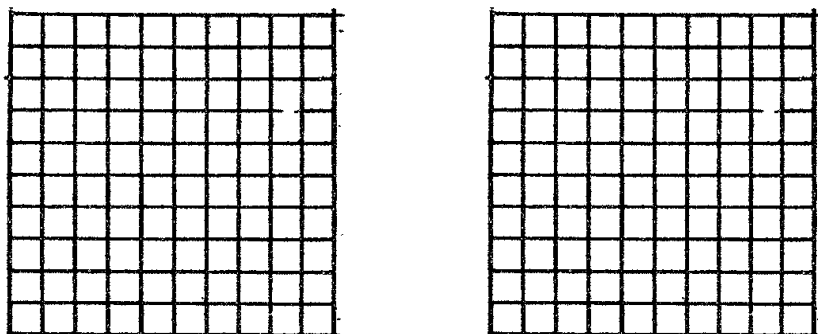
Puesto que los valores asignados a los colores no permiten una alternancia estricta de muertes y reproducciones, se han de lanzar los dados de forma que procesos completos de muerte y reproducción se presenten alternativamente.

4. Juegos de estrategia

- **PINTAR EL TABLERO**

Este es un juego para dos jugadores.

- **Descripción del material del juego.**
- Dos cuadrículas 10×10.
- Un dado.



- **Reglas del juego**
- Cada jugador, que debe colorear su cuadrícula, lanza el dado por turno. El número obtenido indica el número de casillas que el jugador puede pintar en su tablero. Estas casillas han de estar todas en la misma columna.
- Gana el primero que termina de pintar su tablero.

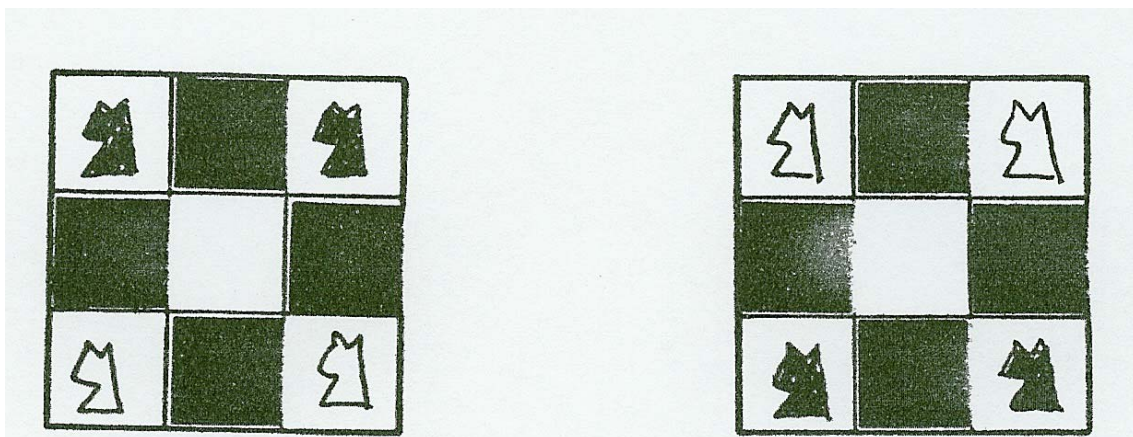
¿Cuál es la mejor estrategia para pintar el cuadrado completo?.

En los juegos de azar y estrategia, aunque se utilice una estrategia mejor, que aumente la probabilidad de ganar, la influencia del azar hace impredecible el resultado final del juego.

- **CAMBIO DE GUARDIA**

En un tablero de ajedrez 3x3 hay colocados cuatro caballos, dos negros y dos blancos, en las esquinas. Cada caballo sólo puede moverse tres cuadrados, siguiendo obligatoriamente la dirección horizontal y la vertical (o al revés). Un caballo no puede ocupar un cuadrado ocupado por otro.

Encuentra el número mínimo de movimientos para intercambiar los caballos blancos por los negros.



Estado inicial

Estado final

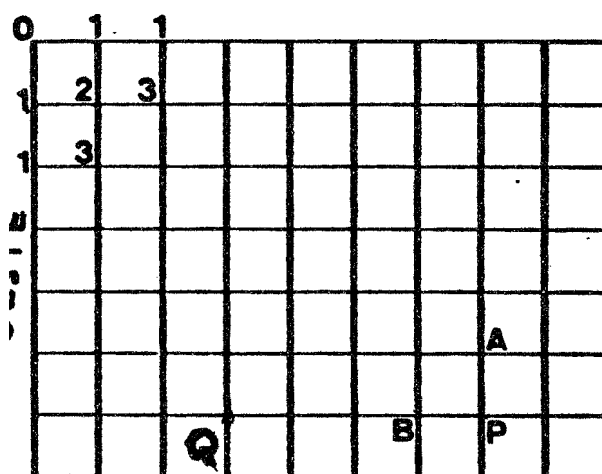
5. Combinatoria

- **CAMINOS**

Imagina que estás en el punto *O* y has de llegar a *P*, con la condición de caminar solamente hacia el este y hacia el sur. ¿Cuántos caminos posibles hay?

En cuanto te pongas a contarlos verás que hay un montón. ¿No podrías elaborar un algoritmo que te permitiera saber cuántos hay? Ese algoritmo, ¿te permitiría saber también cuántos caminos hay de *O* a *Q*?

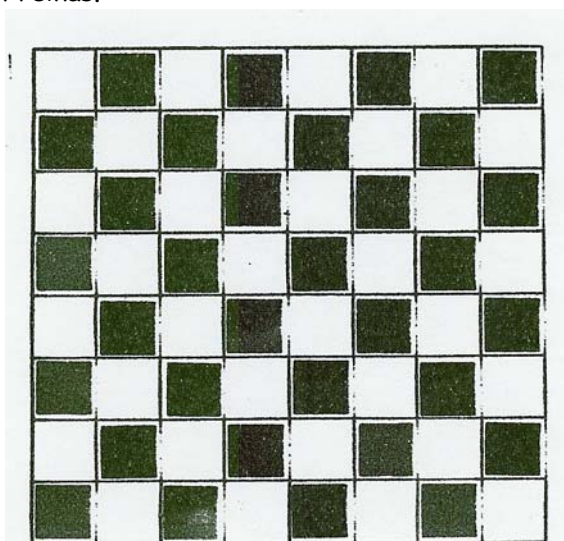
De *O* a *P* hay 1716 caminos, así que necesitas realmente encontrar un algoritmo para resolver el problema.



- **OCHO TORRES**

¿De cuántas maneras se pueden situar 8 torres sobre un tablero de ajedrez, de modo que ninguna sea amenazada por otra?

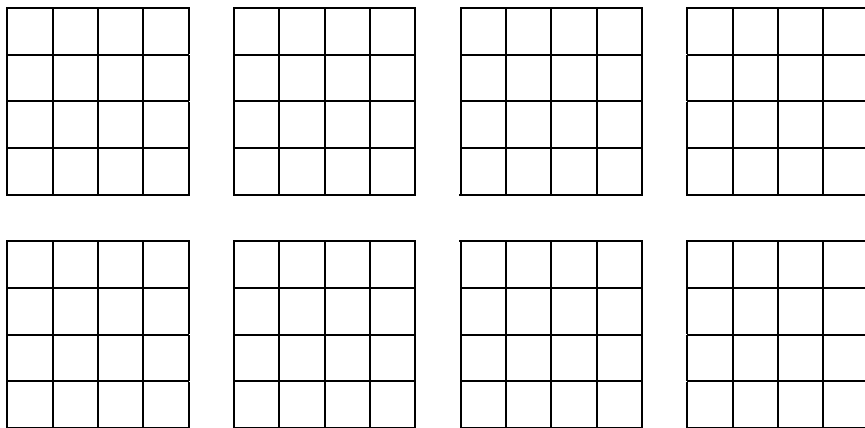
Puede plantearse el mismo problema utilizando 8 reinas o, de forma mucho más sencilla, empleando 4 torres o 4 reinas.



• **COLOREADO**

Sobre un tablero 4x4:

- ¿De cuántas formas diferentes puede colorearse empleando 2 colores indistintamente?
- ¿Y si ha de haber la mitad de casillas de un color y la mitad del otro?
- Utilizando 3 colores, ¿de cuántas maneras distintas puede colorearse si queremos tener 1 casilla de un color, 2 casillas de otro color y 13 del último color?. ¿Y si lo hacemos de forma que salgan 2 casillas del primer color; 4 casillas del segundo color y 10 del tercero?
- De cuántas maneras distintas podemos colorearlo si cada casilla ha de estar pintada con un color distinto?

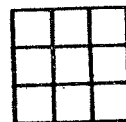


• **CUADRADOS EN UN TABLERO**

Aquí se puede ver un solo cuadrado.

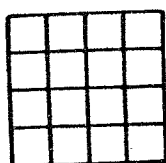


Aquí se pueden ver 6 cuadrados. Cinco de ellos se ven enseguida, pero hay otro.

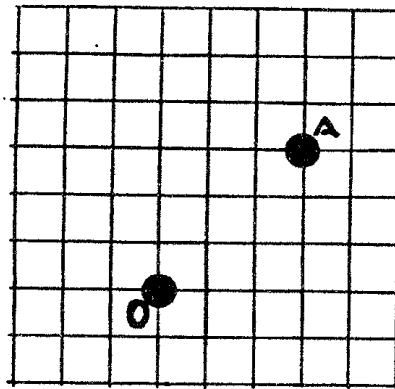
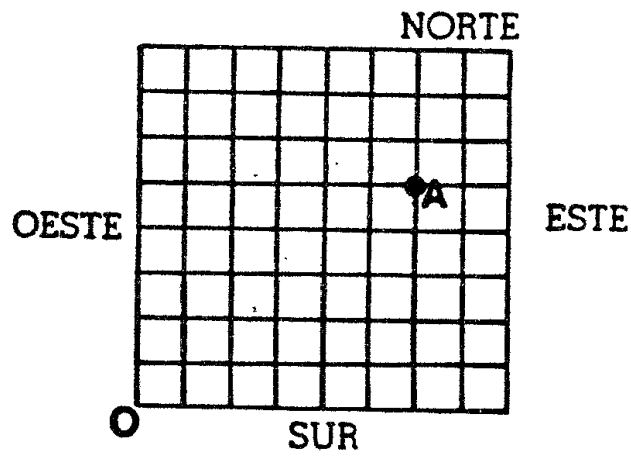


Aquí se pueden ver 20 cuadrados. Búscalos.

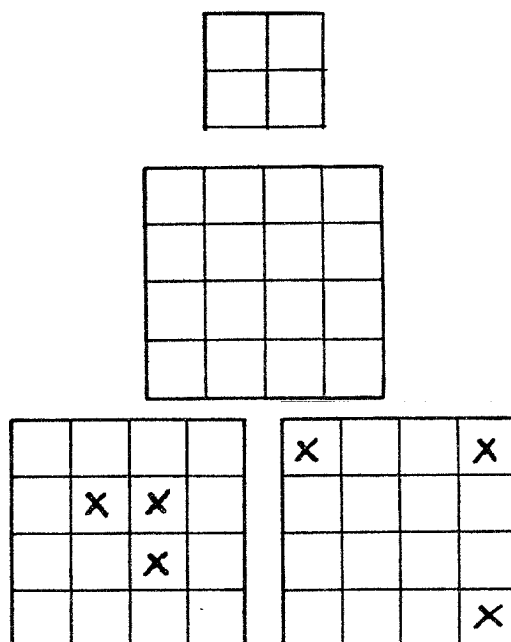
¿Cuántos cuadrados se pueden ver aquí?



PASEO ALEATORIO



LLUVIA ALEATORIA



ELIGE NÚMEROS

2																			.
3																			.
4																			A
5																			.
6																			T
7																			.
8																			E
9																			.
10																			M
11																			.
12																			.

SALTOS DE CANGURO

0																			–
1																			M
2																			E
3																			T
4																			A
5																			–

QUITANDO FICHAS

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

LAS CARAS

SA	LI	DA

DADOS POLIÉDRICOS

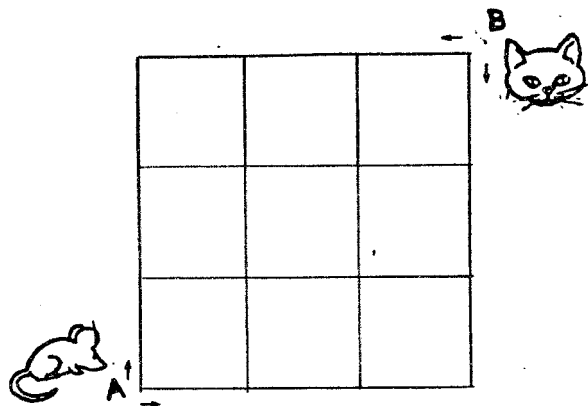
DADO	Nº DE LANZAMIENTOS	RECUENTO	FRECUENCIA
CUBO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	más de 7 ()		
OCTAEDRO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	más de 10 ()		
DODECAEDRO	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	11		
	12		
	13		
	más de 13 ()		

CUADRADOS Y CUBOS

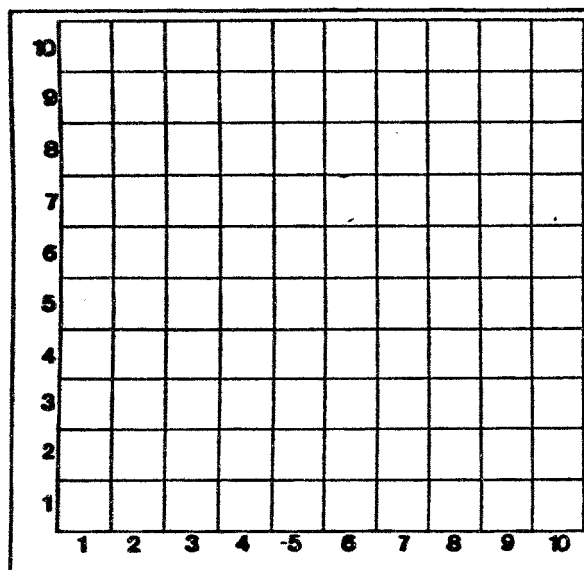
4	36	16
25	1	25
16	36	9

8	216	64
125	1	125
64	216	27

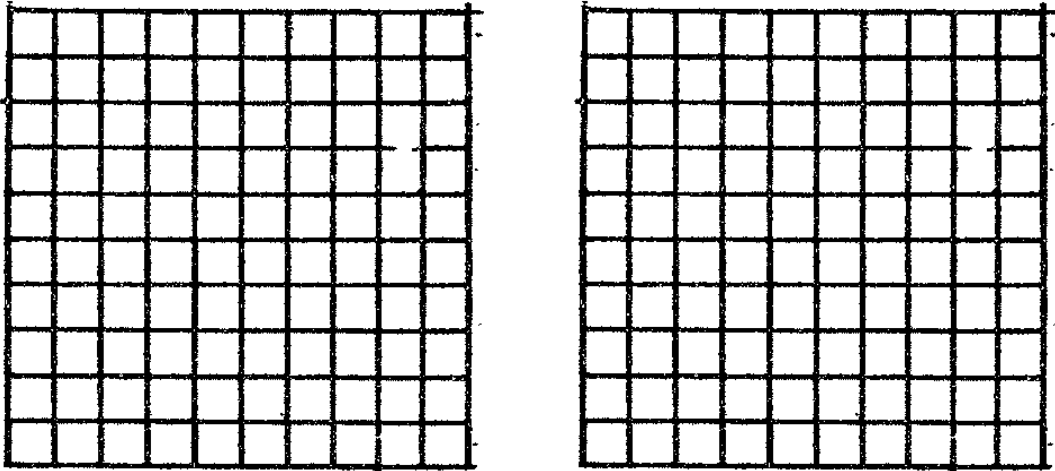
EL ENCUENTRO



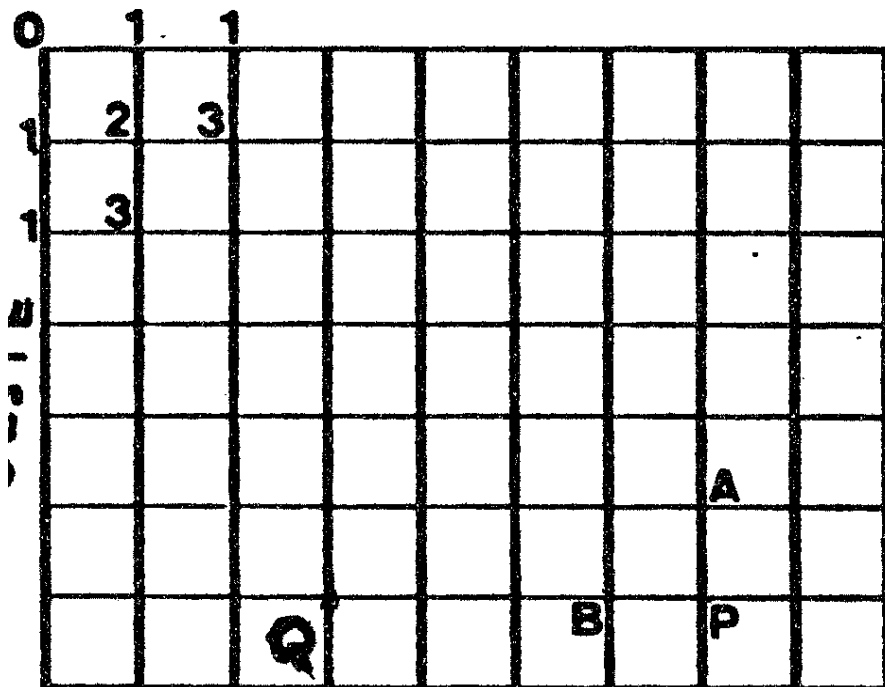
VIDA Y MUERTE



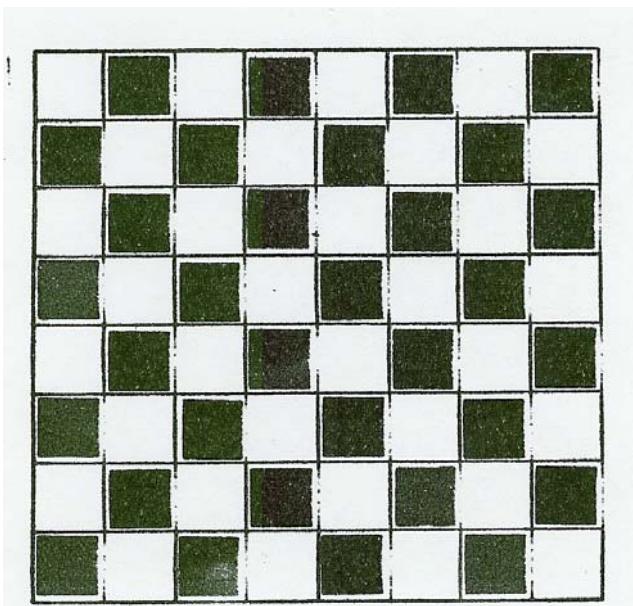
PINTAR EL TABLERO



CAMINOS



OCHO TORRES



COLOREADO

