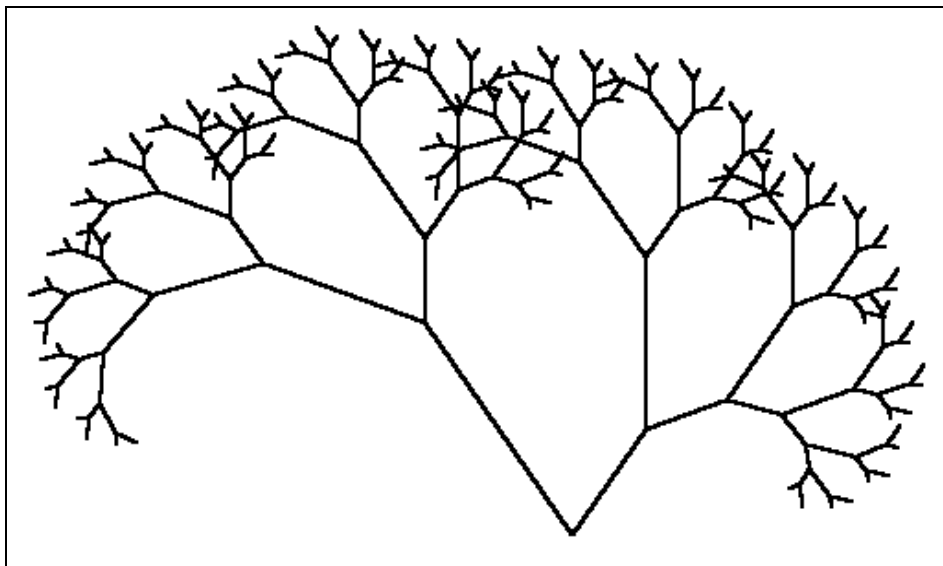
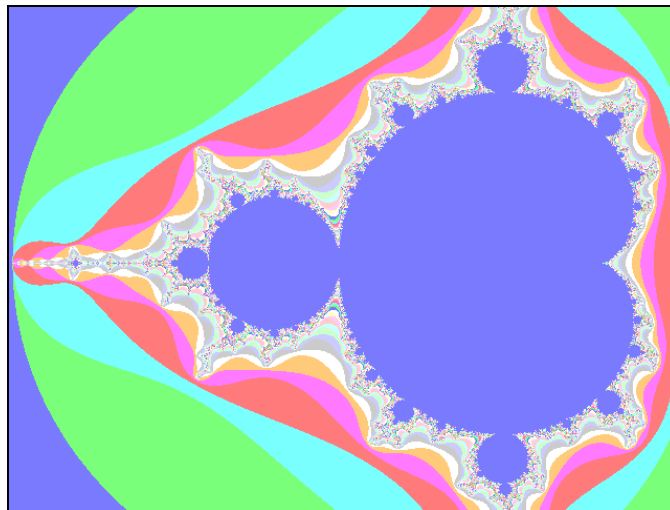


ESTUDI I MANEIG DE LES
**ESTRUCTURES ESPACIALS, LES FORMES I L'ART EN
GEOMETRÍA**

SESSIÓ 7

**DISENY D'ESTRUCTURES
FRACTALS**



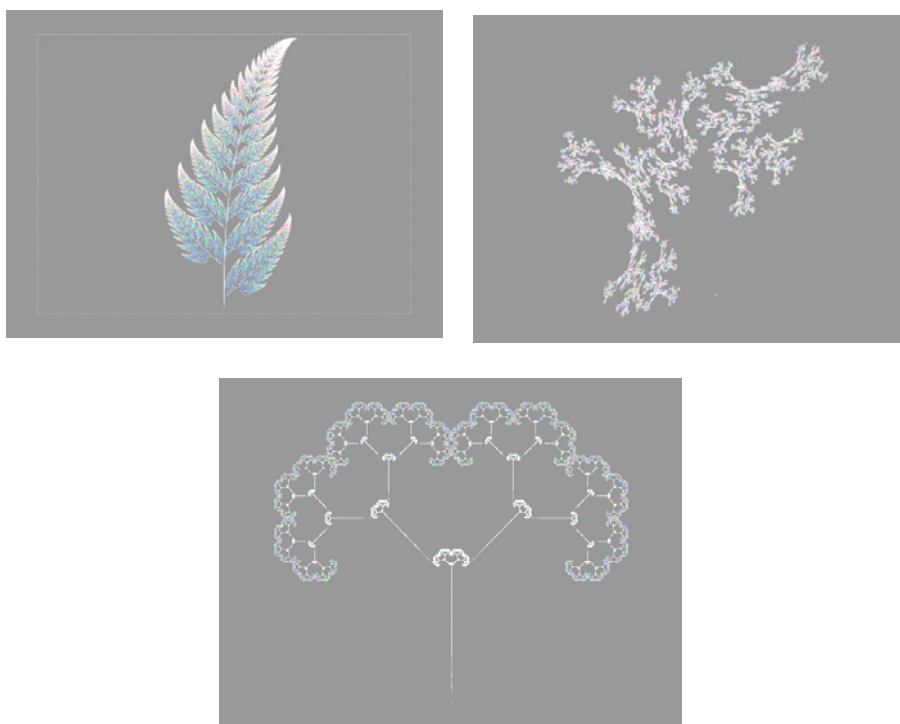
Maurici Contreras / Ricard Peiró

DISENY D'ESTRUCTURES FRACTALS

1. Introducció

Les estructures fractals permeten analitzar una gran diversitat de fenòmens de la naturalesa que aparentment no segueixen una llei, com la capritxosa forma d'una costa, d'un núvol o d'una fulla, el creixement d'una població d'algues o l'evolució d'un bosc. Inclús, hi ha obres d'art la geometria del qual respon a un model fractal. Inventats a principis dels anys seixanta pel matemàtic francès Benoît Mandelbrot, els fractals protagonitzen hui investigacions que s'ocupen de física teòrica, geografia, economia, biologia, ciències socials, etc., de manera que en l'actualitat es pot dir que hi ha una concepció i una geometria fractals de la naturalesa.

La propietat essencial d'una estructura fractal és l'autosemblança, consistent en la presència en el sistema d'estructures que romanen constants al variar l'escala d'observació; és a dir: les parts, per xicotetes que siguin, s'assemblen al tot. Esta propietat podem observar-la en nombrosos exemples de la natura.



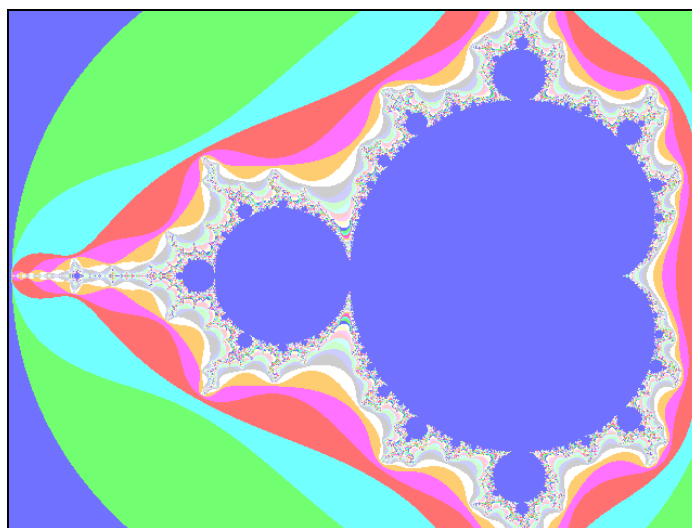
L'estudi i l'exploració d'estructures fractals, basades en la recursió i l'autosemblança, es veu afavorida en l'actualitat per l'ús d'ordinadors cada vegada més potents, que permeten simular processos complexos, de molt diversa naturalesa. D'esta manera podem estudiar des de la Geometria Fractal qüestions que fins ara eren totalment inabordables. En l'actualitat no és estrany trobar equips d'investigació multidisciplinària, formats per economistes, biòlegs, matemàtics, el punt de del qual trobe residix en la Geometria Fractal.

Pareix oportú reflexionar sobre algunes idees bàsiques de la nova geometria en Secundària i Batxillerat. Hui disposem de programari adequat i especialment pròxim a l'estudiant (Fractint, PCFract, WinFract, Fractree, Cabri, MsWlogo), que pot facilitar esta tasca. En este taller presentem un conjunt d'activitats experimentades en 4t d'ESO i 1r de Batxillerat, amb les que pretenem iniciar els estudiants en l'estudi d'estes qüestions.

2. Descobrint fractals amb Fractint

a) El fractal de Mandelbrot

- Introduïx el disquet de Fractint en la unitat A:, inicia l'Explorador de Windows i mostra el contingut del disc fent clic en la icona Disc de 3 1/2. Per a iniciar el programa, fes doble clic en l'arxiu Fractint.exe.
- Alternativament pots reiniciar l'ordinador en mode MS-DOS, teclejar CD.. per a anar a la carpeta arrel C: i teclejar A: ENTER i FRACTINT ENTER.
- Quan s'inicia el programa, es mostren en primer lloc els títols de crèdit i autors. Palsa ENTER per a començar.
- En la següent pantalla es mostren els diferents comandaments del programa i les tecles que han de polsar-se per a executar-los. En primer lloc, és convenient que polses ENTER per a canviar la configuració del monitor, de manera que s'adeqüe a la resolució real de la pantalla. Per exemple, és preferible que seleccions la pantalla VGA de 16 colors (abans que la de 256 colors), perquè té una resolució superior de 640x480 píxels. Palsa ENTER sobre la línia seleccionada per a activar esta resolució.
- Apareix la imatge d'un fractal. Palsa ESC per a tornar a la pantalla de comandaments.
- En la pantalla de comandaments, palsa la tecla T per a seleccionar un tipus de fractal. En la següent pantalla es mostren un bon nombre de fractals.
- Utilitza les tecles de cursor ← , ↑ , → , ↓ per a seleccionar mandel i palsa ENTER. Apareix una pantalla en què es mostren les equacions del fractal corresponent i on es poden modificar els seus paràmetres. Palsa ENTER sense introduir canvis. D'esta manera es mostra en pantalla el famós fractal de Mandelbrot.

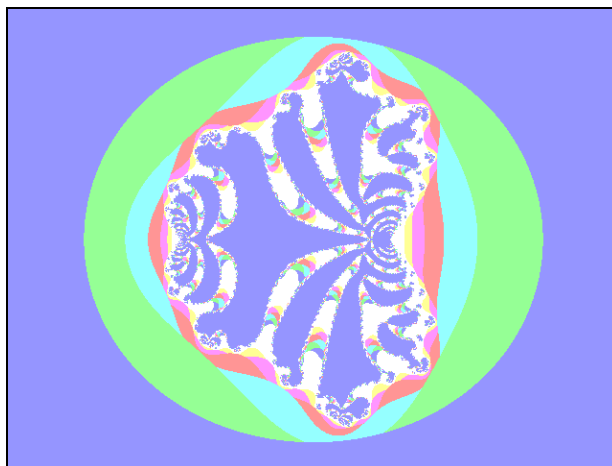


- Palsa la tecla Repàg. Si la mantens polsada, veuràs com apareix un rectangle de selecció en pantalla que va reduint el seu grandària. Pots modificar el seu grandària amb ajuda de les tecles Avpàg i Repàg. Amb ajuda del ratolí o de les tecles de cursor, pots desplaçar el rectangle de selecció a la part del fractal que desitges ampliar. Palsa ENTER per a obtindre l'ampliació en la següent pantalla.

- Utilitza este procediment per a ampliar la zona del cap de l'escarabat de Mandelbrot, situada a l'esquerra de la figura. Quan polses ENTER, veuràs que la següent pantalla mostra un nou escarabat de Mandelbrot semblant a l'anterior.
- Repetix l'operació: àmplia el cap de l'esquerra del nou escarabat de Mandelbrot. Polsa ENTER i observa que apareix un nou escarabat semblant als anteriors.
- Segueix el procés quatre o cinc vegades més i veuràs com sempre obtens el mateix escarabat. L'estructura del fractal es repetix a qualsevol escala. En açò consistix l'AUTOSEMBLANÇA. Independentment de l'escala, el fractal és sempre igual a si mateix en totes les seues parts.

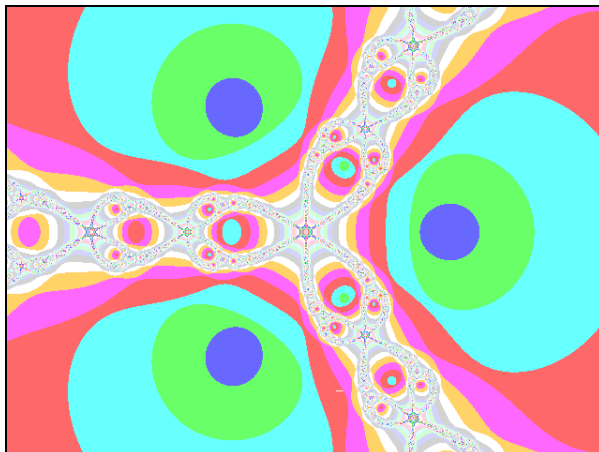
b) Altres fractals

- Polsa la tecla T per a tornar a la pantalla de selecció del tipus de fractal. Selecciona fenquàs amb les tecles de cursor i polsa ENTER. En la següent pantalla apareixen les equacions del nou fractal i una finestra en què es poden modificar els paràmetres. Polsa ENTER sense introduir canvis. D'esta manera es mostra en pantalla el denominat fractal d'Henón.
- Utilitzant les tecles repàg, avpàg i el ratolí o les tecles de moviment del cursor \leftarrow , \uparrow , \rightarrow , \downarrow , desplaça el rectangle de selecció a una zona concreta del fractal i polsa ENTER. D'esta manera obtens una ampliació de la zona seleccionada.
- Repetix l'operació anterior diverses vegades i comprova que es complix la propietat d'autosemblança.
- Polsa la tecla T i en la pantalla corresponent selecciona, amb ajuda de les tecles de cursor, el fractal bifurcation. Polsa ENTER i comprova que apareix una pantalla en què es poden modificar els paràmetres. Polsa ENTER de nou i es mostrarà en pantalla el fractal Bifurcation.
- Igual que abans, utilitza les tecles repàg, avpàg, \leftarrow , \uparrow , \rightarrow , \downarrow per a seleccionar una de les bifurcacions. Polsa ENTER per a ampliar la dita zona i comprova que s'obté una pantalla semblant a l'anterior. Repetix l'operació diverses vegades i comprova que es complix la propietat d'autosemblança.
- Polsa la tecla T i selecciona el fractal spider. Quan aparega la pantalla de modificació de paràmetres, polsa ENTER sense introduir canvis i veuràs com es mostra una imatge del fractal Spider.



- Selecciona el centre de la teranyina i àmplia la dita zona, usant les tècniques anteriors. Repetix l'ampliació diverses vegades i comprova l'autosemblança.

- Posa la tecla T i selecciona el fractal newton. No introduïsqués canvis en la pantalla de modificació de paràmetres i posca ENTER. Es mostra en pantalla una imatge del fractal Newton.



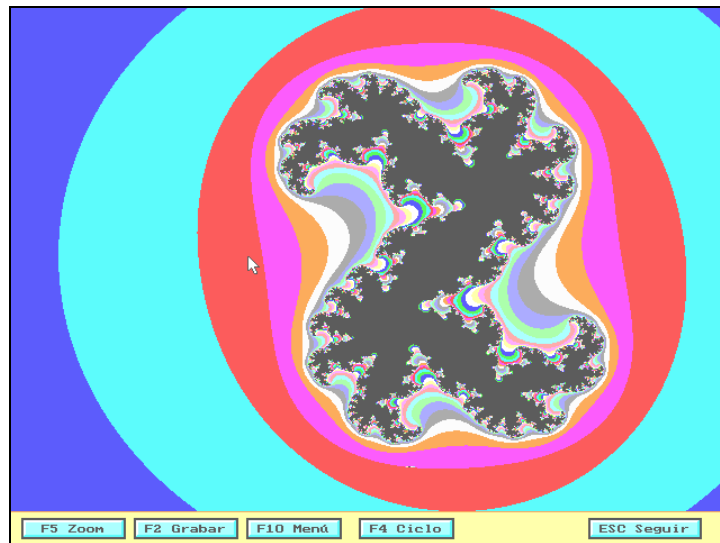
- Selecciona la part central del fractal i àmplia la dita zona, usant les tècniques vistes anteriorment. Repetix l'ampliació diverses vegades i comprova l'estructura autosemblant del fractal.

c) Exercicis

- Explora altres estructures presents en la pantalla de selecció del tipus de fractal (tecla T). Per exemple, selecciona i investiga els fractals: lorenz, julia, roessler, test, difussion. Comprova en cada cas l'autosemblança.
- Com ja has observat, al seleccionar un fractal apareix una pantalla en què es poden modificar els paràmetres de les seues equacions. Selecciona el fractal mandel i modifica els seus paràmetres al teu gust. Comprova el resultat. Fes el mateix amb els fractals fenquàs, bifurcation, *spider* i newton.

3. Fractals tipus Mandelbrot amb PCFract i WinFract

- Inicia el programa PCFract, obrint la carpeta PCFract i fent doble clic sobre l'arxiu Pcfraact.exe.
- Selecciona Arxiu / Llegir fractal. Fes clic en Mandel1.fra i fes clic en OK. Apareix una pantalla amb el fractal de Mandelbrot.
- Fes clic en el botó F4 Cicle i observa que es genera una imatge dinàmica del fractal. Posa la tecla ESC per a detindre l'animació.
- Fes clic en el botó F5 Zoom i veuràs que apareix un rectangle de selecció. Mou el ratolí cap a la zona a ampliar i fes clic perquè es produïska l'ampliació. Comprova amb esta tècnica la propietat d'autosemblança d'unes zones del fractal respecte d'altres.
- Posa F10 per a accedir novament al menú i selecciona el comandament Fractals / Julia. Fes un estudi semblant d'este fractal, fent clic en el botó F4 Cicle. Posa ESC per a detindre l'animació.

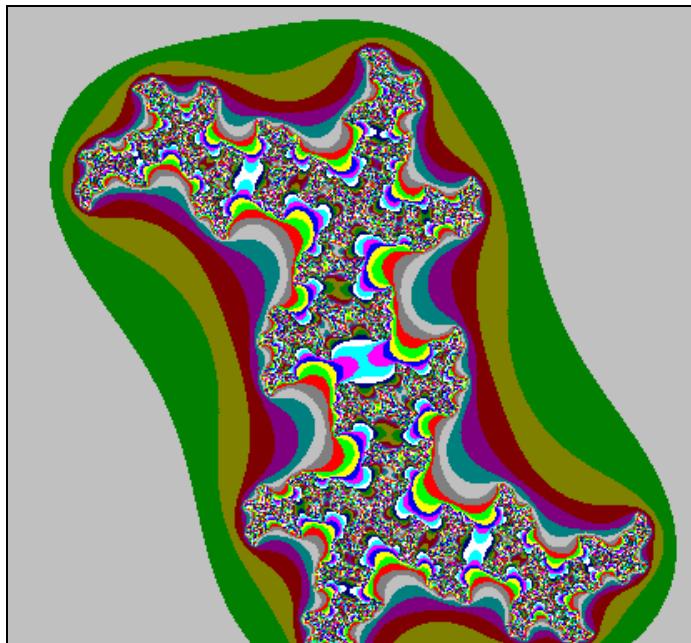


- Utilitzant el botó F5 *Zoom*, àmplia algunes zones del fractal i comprova la propietat d'autosemblança.
- Polsa F10 per a accedir al menú principal i selecciona en el menú Fractals cada un dels conjunts Dragó, Sin, Cosinus, Sin hiperbòlic, Cosinus hiperbòlic, Exponencial i Sierpinski. Fes un estudi de l'autosemblança en cada un d'ells.
- Selecciona Fractals / Plasma. Observa la generació dinàmica del fractal. Polsa una tecla o fes clic amb el botó del ratolí per a detindre el procés. Tanca la finestra del programa PCFRACT.

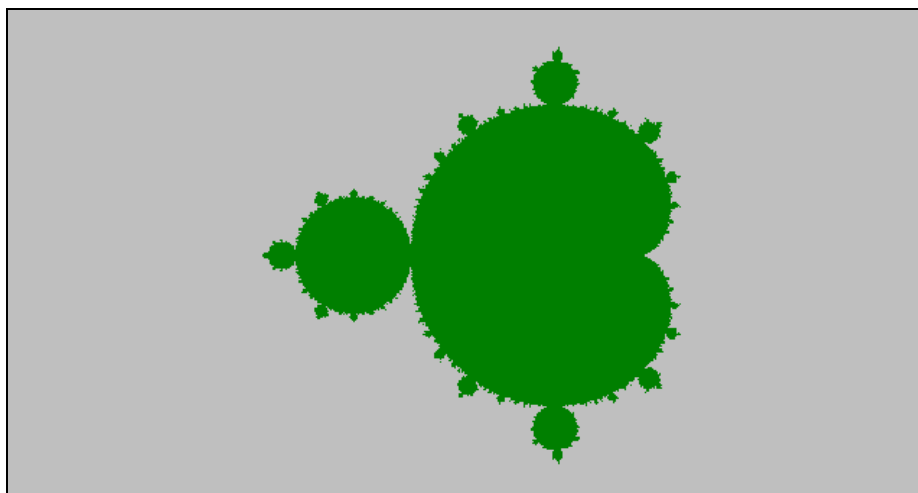
Observa que, a diferència del programa FRACTINT, PCFRACT no mostra les fórmules matemàtiques que generen l'estructura fractal. Es tracta d'un programa gràfic que únicament permet la visualització dels fractals generats.

- Inicia el programa WinFract, obrint la carpeta WinFract i fent doble clic sobre l'arxiu Winfract.exe.
- Tria en comandament File / *Open* i selecciona en la carpeta c:\winfract l'arxiu fract001.gif i fes clic en el botó *Open*.
- Repetix el mateix procediment per a obrir l'arxiu fract002.gif. Veuràs com apareix la imatge del fractal de Mandelbrot.
- Selecciona el comandament Options / Fractal Formula. En la llista desplegable selecciona el fractal julia i fes clic en OK. Observa els paràmetres de finestra de la següent pantalla i fes clic en OK.
- Per a modificar la imatge procedix de la forma següent: selecciona l'arxiu File / Copy to ClipBrd. A continuació obri el programa Paint de Windows, seleccionat Inici / Accessoris / Paint.
- Des de la finestra de Paint, selecciona Edició / Apegar. Si apareix una pantalla indicant que hi ha diferències de grandària entre el mapa de bits i la imatge del portapapers, fes clic en No i veuràs la imatge del portapapers.

- Fes clic en el botó Farcit amb color i en la paleta de colors selecciona el gris. A continuació fes clic sobre el fons de la imatge per a donar-li color gris. Guarda la imatge, talla-la i aplega-la en un document nou de Word.

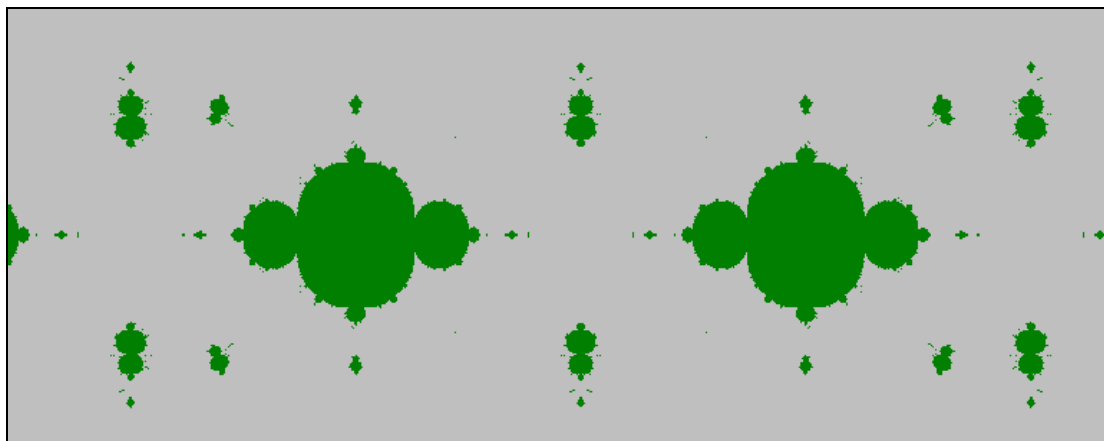


- Fes clic en el botó Fractint for Windows situat en la barra de tasques per a tornar a Winfract. Selecciona Options / Fractal Formula. En la llista desplegable selecciona el fractal mandel i fes clic en OK. Confirma la nova finestra polsat OK.
- Amb la imatge del fractal de Mandelbrot en pantalla, selecciona Options / Options, Doodads. En la següent finestra, en Outside Color introduïx un número entre 0 i 15. Fes clic en OK i comprova el resultat. Prova altres colors de fons per a la pantalla.



- Selecciona el comandament Options / Image Settings. En la caixa Image Size canvia la grandària de la imatge, seleccionant el format 320x200. Fes clic en OK i observa el resultat.

- Utilitzant el comandament Options / Fractal Formula, explora altres fractals, com lorenz, kantorus, manowar, newton, *spider*, etc. Explora també l'arxiu Lsystem que conté els fractals coneguts com a sistemes de funcions iterades.
- En cada cas, modifica la grandària de la finestra de visualització i els colors usant els comandaments Options / Image Settings i Options / Options, Doodads.

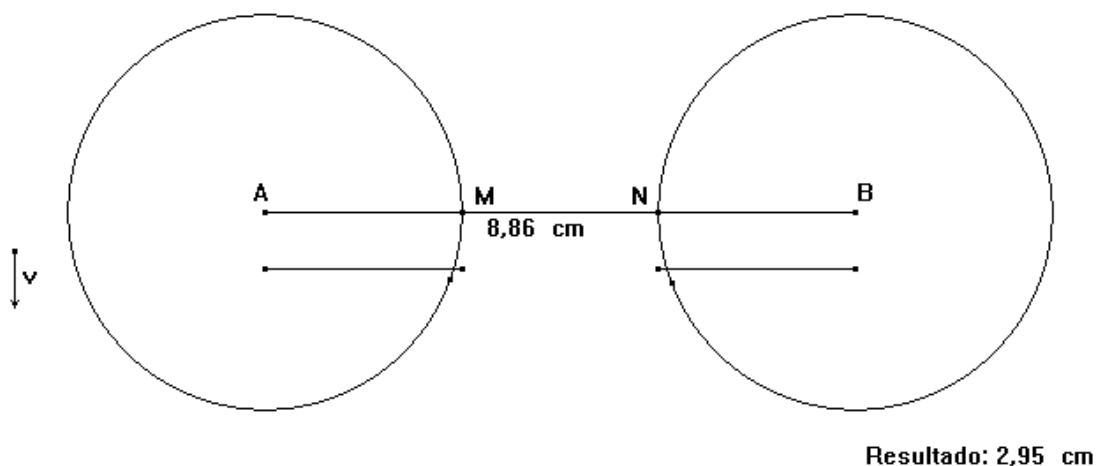


4. Dibuixant fractals amb Cabri

a) Fractal de Cantor. Dimensió fractal.

- Inicia el programa Cabri, fent clic en Inici / Programes / Cabri-Geomètre II.
- Definirem una macro que permetrà construir, per repeticions successives, el fractal de Cantor. Amb la ferramenta Punt, dibuixa els extrems A i B d'un segment.
- Dibuixa un segment amb extrems en tals punts, A i B. Amb la ferramenta Vector, dibuixa un vector v de poca longitud, en direcció perpendicular al segment.
- Amb la ferramenta Distància i longitud, mesura la longitud del segment AB.
- Amb la ferramenta Calculadora, dividix la longitud del segment AB entre 3. Arrossega el resultat a l'àrea de treball.
- Utilitza la ferramenta Transferència de mesures per a transferir la mesura obtinguda (igual a la tercera part de la longitud del segment) a partir dels extrems del segment.
- Amb la ferramenta Circumferència, dibuixa circumferències amb centres en els extrems A i B del segment i radi igual a la mesura transferida.
- Assenyala els punts d'intersecció, M' i N de les dos circumferències amb el segment.
- Dibuixa els segments AM i NB.
- Utilitza la ferramenta Translació per a traslladar els segments AM i NB segons el vector v.

- Fes clic en el botó Objectes inicials i selecciona els extrems A i B del segment i el vector v.
- Fes clic en el botó Objectes finals i selecciona els segments traslladats d'AM i NB.
- Fes clic a Definir Macro i en el següent quadro de diàleg introduïx com a nom de la macro cantor. Fes clic a Acceptar.



D'esta manera ja hem definit la macro. Per a comprovar el resultat, seguix els passos següents:

- Dibuixa un segment AB de qualsevol longitud i un vector v.
- Selecciona la macro cantor i, a continuació, selecciona els extrems A i B del segment i el vector v. Observa el resultat.
- Repetix l'apartat anterior per a cada un dels segments obtinguts i observa el resultat.
- Contínua repetint l'apartat (2) i observa els resultats. Si seguim el procés indefinidament, el resultat és un conjunt de punts aïllats, que es denomina pols o fractal de Cantor.



D'on procedix el nom de fractal?. Este nom està associat a la dimensió. Recordem que la dimensió d'un punt és 0, la d'una recta és 1, la d'un pla és 2, la de l'espai 3. Quina és la dimensió d'un fractal?. Vegem-ho, per exemple, per al fractal de Cantor.

Si la longitud del segment inicial és 1, llavors les longituds obtingudes en cada un dels passos són:

PAS	0	1	2	3	4
LONGITUD	1	$2 \cdot \frac{1}{3}$	$4 \cdot \frac{1}{9}$	$8 \cdot \frac{1}{27}$	$16 \cdot \frac{1}{81}$

És a dir, en cada pas es fan dos còpies d'un segment que té 1/3 de la longitud del segment anterior. Tenim, perquè, núm. de còpies=N=2 i les longituds formen una successió geomètrica de raó r=1/3. Per tant, és evident que les longituds tendixen a zero. No obstant, **la dimensió fractal és l'exponent D a què cal elevar la raó de la successió de longituds perquè, en cada pas, la longitud total romanga constant (igual a 1)**. Així, s'ha de complir:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^D \right)^n = 1$ Per al que és prou que $2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^D = 1$. D'on: $\left(\frac{1}{3} \right)^D = \frac{1}{2}$. Prenent logaritmes,

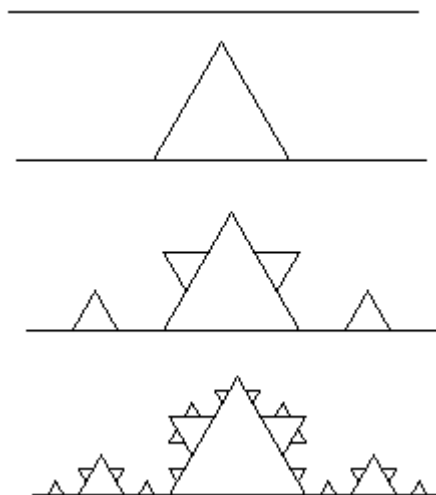
resulta: $D \cdot \ln \left(\frac{1}{3} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right)$. Per tant: $-D \cdot \ln 3 = -\ln 2$. Després: $D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$. És a dir, la dimensió del

conjunt de Cantor és una fracció compresa entre 0 i 1. Es tracta, perquè, d'un conjunt que té **dimensió fraccionària** (d'ací el nom de **fractal**).

En general, si en el procés de construcció de qualsevol fractal, en cada pas es produïxen N còpies semblants a l'original i les longituds formen una successió geomètrica de raó r=1/R, llavors, la dimensió

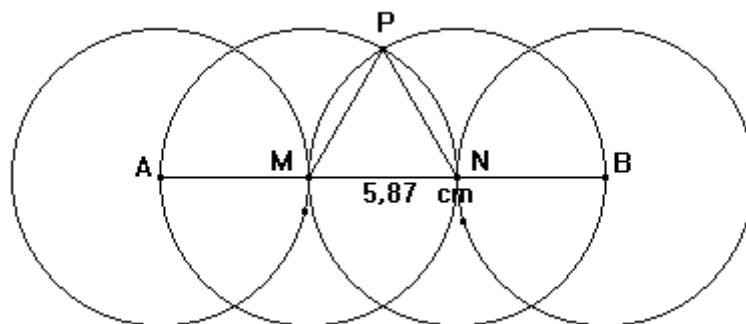
fractal és: $D = \frac{\ln N}{\ln R}$.

b) La corba de Koch i el floc de neu



- Definirem una macro que permetrà construir, per repeticions successives, un altre fractal denominat corba de Koch o floc de neu. Amb la ferramenta Punt, dibuixa els extrems A i B d'un segment.

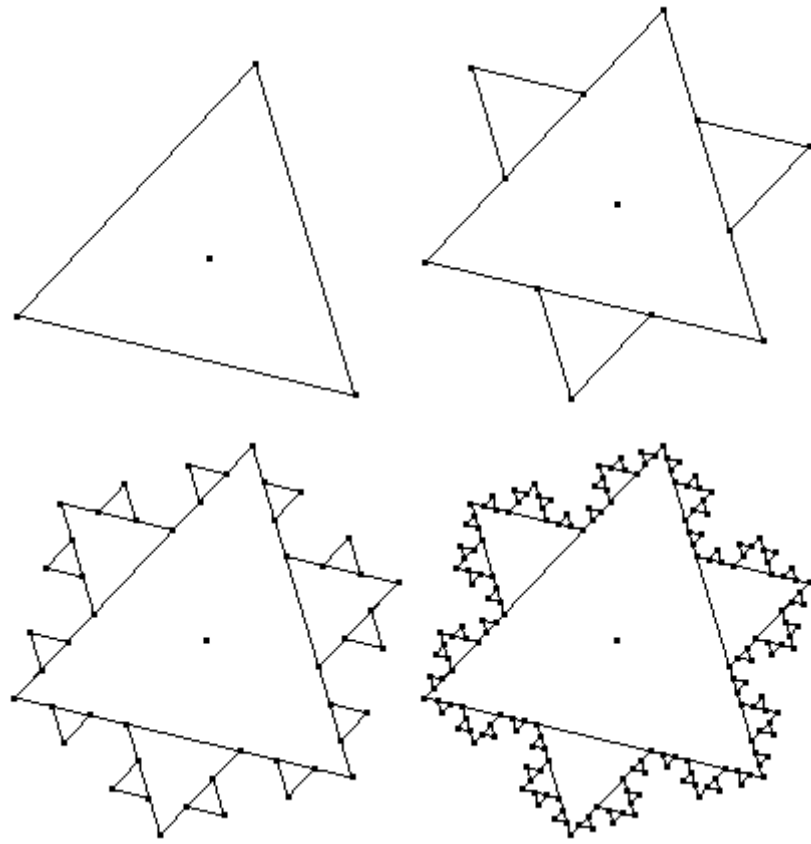
- Dibuixa un segment amb extrems en tals punts, A i B.
- Amb la ferramenta Distància i longitud, mesura la longitud del segment AB.
- Amb la ferramenta Calculadora, dividix la longitud del segment AB entre 3. Arrossega el resultat a l'àrea de treball.
- Utilitza la ferramenta Transferència de mesures per a transferir la mesura obtinguda (igual a la tercera part de la longitud del segment) a partir dels extrems del segment.
- Amb la ferramenta Circumferència, dibuixa circumferències amb centres en els extrems A i B del segment i ràdio igual a la mesura transferida.
- Assenyala els punts d'intersecció, M' i N de les dos circumferències amb el segment.
- Amb la ferramenta Circumferència, dibuixa circumferències amb centres en els punts M' i N i ràdio igual a la mesura transferida (per tant, passen pels extrems A i B, respectivament).
- Assenyala el punt P d'intersecció de les dos circumferències que acabes de dibuixar.
- Utilitza la ferramenta Polígon per a dibuixar un polígon de vèrtexs AMPNBA (assenyala cada un dels punts en eixe orde).
- Fes clic en el botó Objectes inicials i selecciona els extrems A i B del segment.
- Fes clic en el botó Objectes finals i selecciona el polígon AMPNBA.
- Fes clic a Definir Macro i en el següent quadro de diàleg introduïx com a nom de la macro koch. Fes clic a Acceptar.



D'esta manera ja hem definit la macro. Per a comprovar el resultat, dibuixarem el fractal floc de neu. Per a això seguix els passos següents:

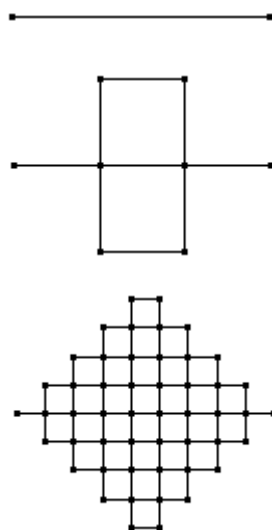
- Amb la ferramenta Polígon regular, dibuixa un triangle equilàter ABC.
- Selecciona la macro koch i, a continuació, selecciona els extrems A i B del primer costat, els extrems B i C del segon i els extrems C i A del tercer. Observa el resultat.
- Repetix l'apartat anterior per a cada un dels segments obtinguts i observa el resultat.

- Contínua repetint l'apartat (2) i observa els resultats. Si seguim el procés indefinidament, el resultat és un fractal, que s'assembla al floc de neu.



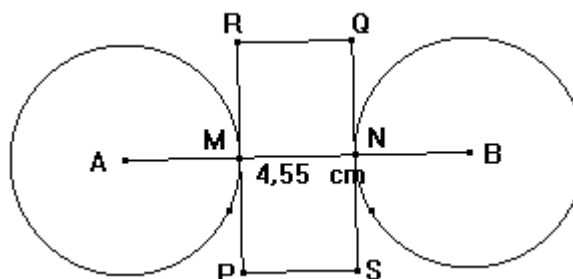
Com en cada pas hi ha un nombre de còpies igual a $N=4$ i les longituds formen una successió geomètrica de raó $r=1/3$ (és a dir, $R=3$), la dimensió fractal de la corba de Koch és: $D = \frac{\ln N}{\ln R} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$.

c) La corba de Peano



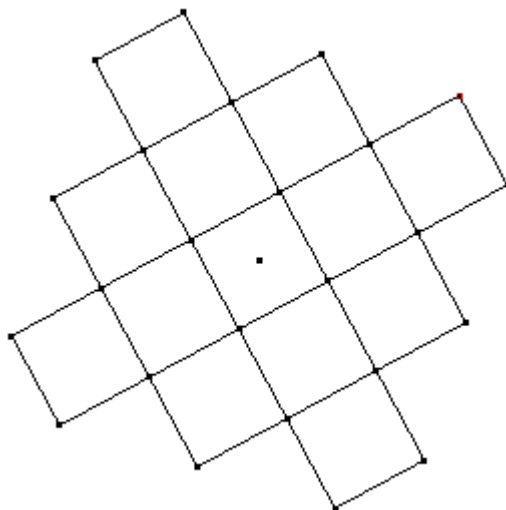
- Definirem una macro que permetrà construir, per repeticions successives, un altre fractal denominat corba de Peano. Amb la ferramenta Punt, dibuixa els extrems A i B d'un segment.

- Dibuixa un segment amb extrems en tals punts, A i B.
- Amb la ferramenta Distància i longitud, mesura la longitud del segment AB.
- Amb la ferramenta Calculadora, dividix la longitud del segment AB entre 3. Arrossega el resultat a l'àrea de treball.
- Utilitza la ferramenta Transferència de mesures per a transferir la mesura obtinguda (igual a la tercera part de la longitud del segment) a partir dels extrems del segment.
- Amb la ferramenta Circumferència, dibuixa circumferències amb centres en els extrems A i B del segment i ràdio igual a la mesura transferida.
- Assenyala els punts d'intersecció, M' i N de les dos circumferències amb el segment.
- Dibuixa els segments AM i NB.
- Amb la ferramenta Edició numèrica tecleja 90 en una zona lliure de l'àrea de treball.
- Amb la ferramenta Rotació, gira el segment AM al voltant del punt M un angle de 90°. Per a això fes clic sobre el punt M i sobre el número 90 que has editat en el pas anterior. D'esta manera obtens el segment MP.
- Amb la ferramenta Rotació, gira el segment NB al voltant del punt N un angle de 90°. Obtens així el segment NQ.
- Amb la ferramenta Simetria axial, dibuixa els simètrics dels segments MP i NQ. Obtens així els segments MR i NS.
- Amb la ferramenta Polígon, dibuixa el polígon AMRQNMPSNBA. (Assenyala els vèrtexs en este orde).
- Fes clic en el botó Objectes inicials i selecciona els extrems A i B del segment i el número 90 de l'àrea de treball.
- Fes clic en el botó Objectes finals i selecciona el polígon AMRQNMPSNBA.
- Fes clic a Definir Macro i en el següent quadro de diàleg introduïx com a nom de la macro peano. Fes clic a Acceptar.

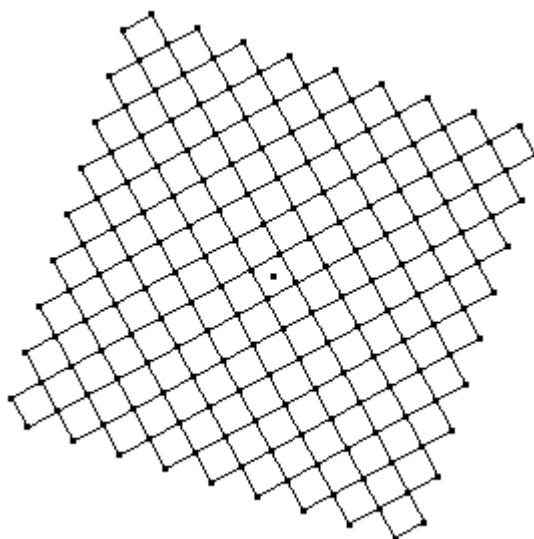


D'esta manera ja hem definit la macro. Per a comprovar el resultat, aplicarem la macro de Peano successivament sobre els costats d'un quadrat. Segueix els passos següents:

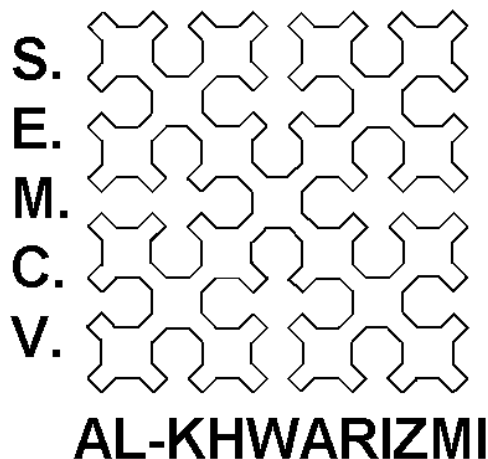
- Amb la ferramenta Polígon regular, dibuixa un quadrat ABCD.
- Selecciona la macro peano i, a continuació, selecciona els extrems A i B del primer costat i el número 90 de l'àrea de treball. Repetix el mateix amb els costats BC, CD i DÓNA. Observa el resultat.
- Repetix l'apartat anterior per a cada un dels segments obtinguts i observa el resultat.



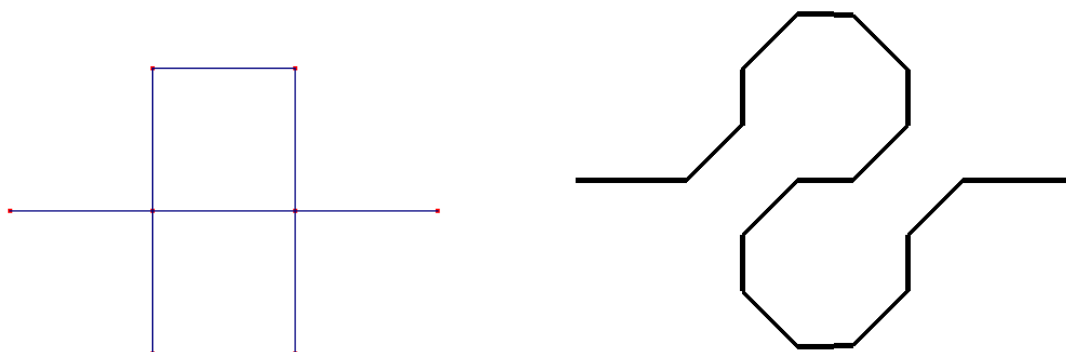
- Contínua repetint l'apartat (2) i observa els resultats. Si seguim el procés indefinidament, el resultat és un fractal, que s'anomena corba de Peano.



Un fractal del mateix tipus que la corba de Peano és el que constitueix el logotip de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi", com pots comprovar en la figura següent:



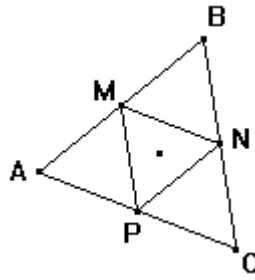
En les següents figures, es mostra que la corba de Peano té orientació. En les mateixes hem eliminat els punts dobles (que estan situats en els vèrtexs) per a fer més llegible l'orientació de la corba:



d) Triangle de Sierpinski

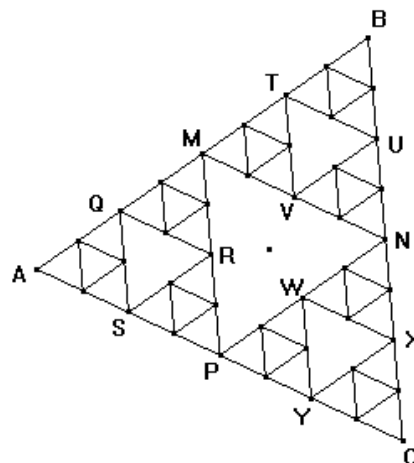
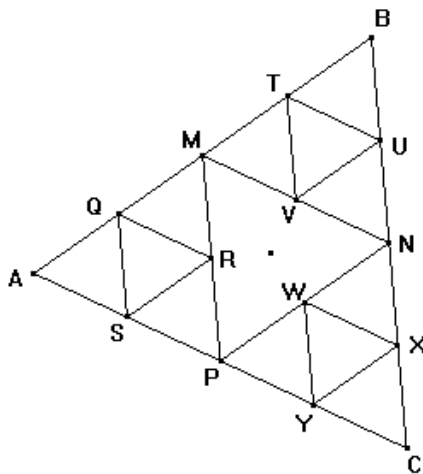
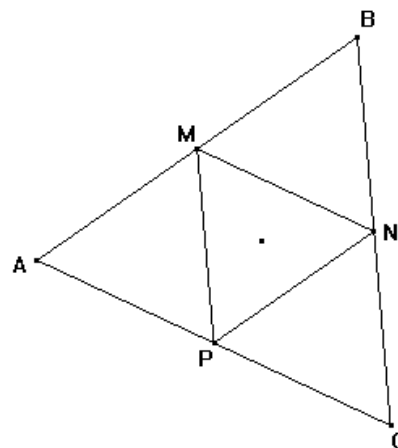
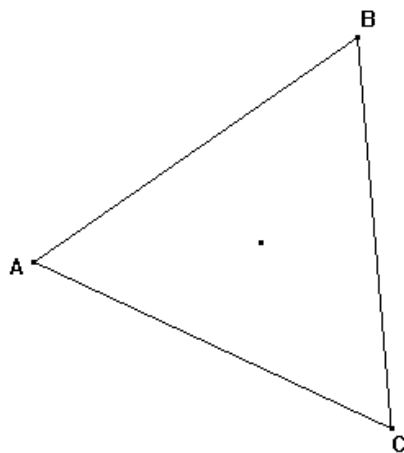
Definirem una macro que permetrà construir, per repeticions successives, un altre fractal denominat triangle de Sierpinski.

- Amb la ferramenta Polígon regular, dibuixa un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C.
- Selecciona la ferramenta Punt mitjà i assenyala cada un dels costats AB, BC i CA del triangle equilàter. D'esta manera obtens els punts M, N i P.
- Amb la ferramenta Triangle, dibuixa el triangle de vèrtexs M, N i P. Observa que este triangle també és equilàter.
- Fes clic en el botó Objectes inicials i selecciona els vèrtexs A, B i C del triangle equilàter inicial.
- Fes clic en el botó Objectes finals i selecciona el triangle equilàter MNP.
- Fes clic a Definir Macro i en el següent quadro de diàleg introduïx com a nom de la macro sierpinski. Fes clic a Acceptar.



Una vegada definida la macro, anem a utilitzar-la per a construir el denominat triangle de Sierpinski. Per a això seguix els passos següents:

- Amb la ferramenta Polígon regular, dibuixa un triangle equilàter ABC.
- Selecciona la macro sierpinski i, a continuació, selecciona els vèrtexs A, B i C del triangle. D'esta manera obtens el triangle equilàter MNP.
- Repetix l'apartat anterior per a cada un dels triangles equilàters AMP, MNB i NCP situats en els cantons. Observa el resultat.
- Contínua repetint l'apartat (2) i observa els resultats. Si seguim el procés indefinidament, el resultat és un fractal, que s'anomena triangle de Sierpinski.

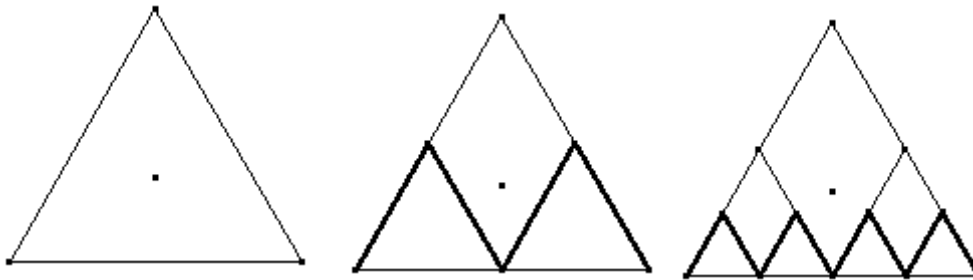


e) Exercicis

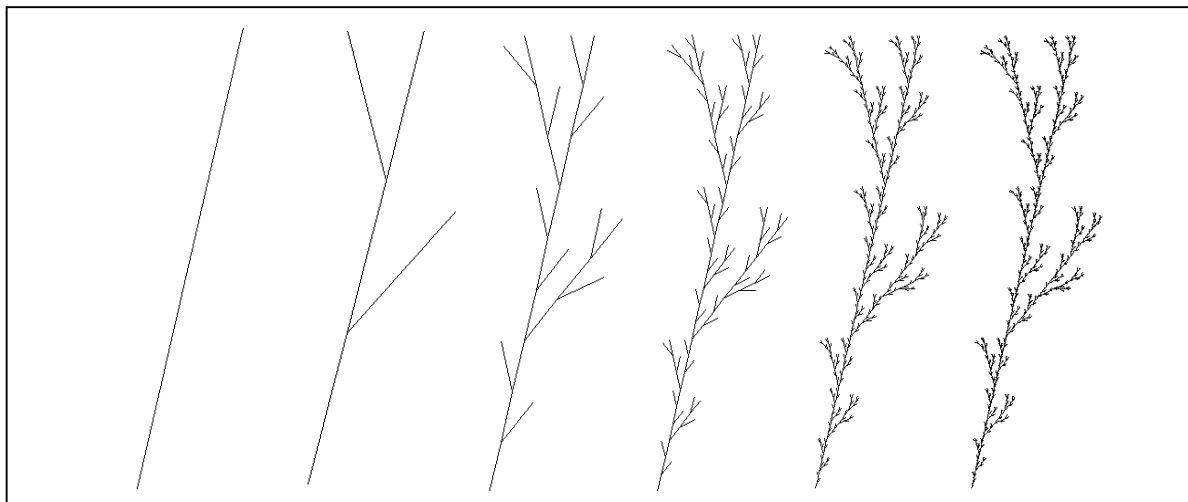
- a) Quina és la dimensió fractal de la corba de Peano?. Per a esbrinar-ho, tin en compte les següents figures on es mostra la gènesi de l'estructura d'este fractal.



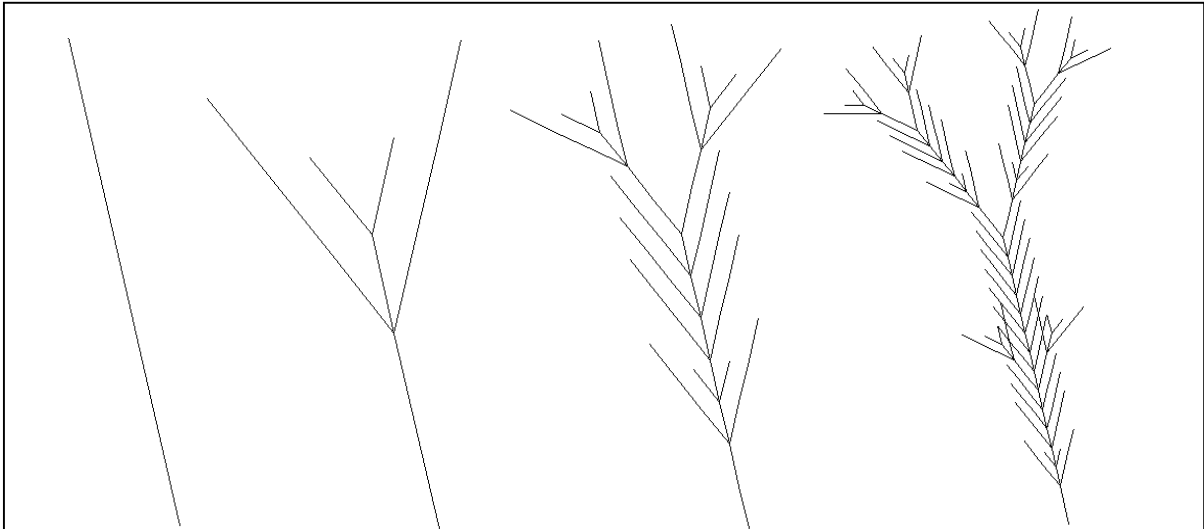
- b) Les següents figures pareixen suggerir una estructura fractal. És realment una estructura fractal?. En cas afirmatiu, quina és la seua dimensió?.

**5. Fractals tipus arbre amb Fractree**

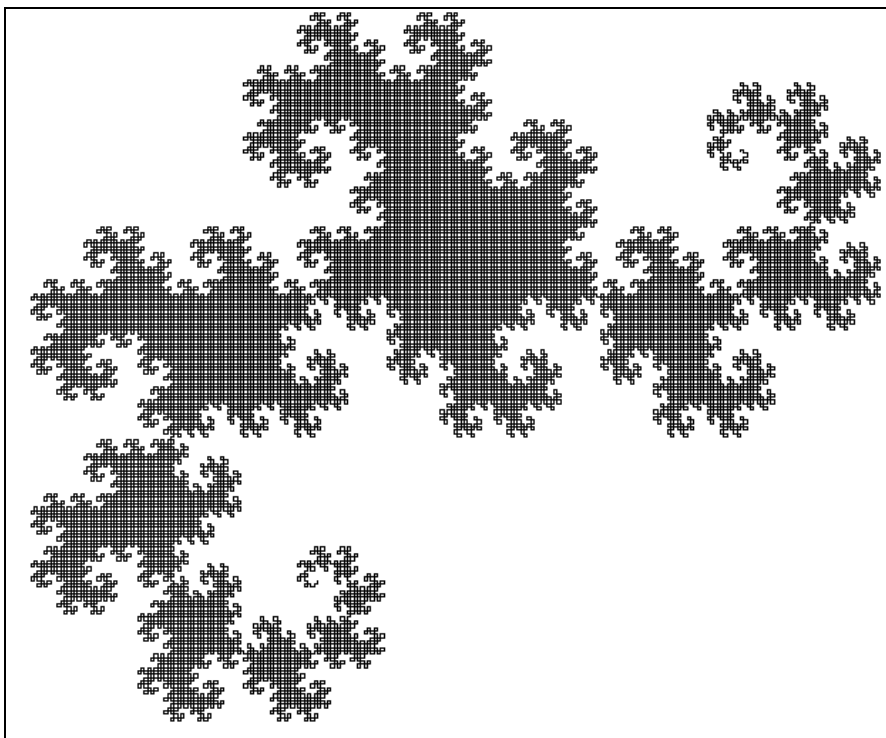
- Inicia el programa Fractree, obrint la carpeta Fractree i fent doble clic sobre l'arxiu Fractree.exe.
- Selecciona el comando File / Open. En la llista desplegable de la carpeta c:\fractree, selecciona l'arxiu bush1.fra i fes clic a Acceptar.
- En la següent finestra es mostra com està dissenyat el fractal. Concretament, es mostren els axiomes i les regles de construcció. Fes clic en OK.
- Selecciona el comandament Display / Statge 1 i observa el resultat.
- Selecciona el comandament Display / Statge 2 i observa el resultat. Repetix el mateix procediment per a visualitzar les pantalles successives. Observa el procés iteratiu i el fractal que es forma. També pots seleccionar el comandament Display / Next Statge o pulsar CTRL+N per a passar d'un estat al següent.



- Selecciona el comandament File / Open. En la llista desplegable de la carpeta c:\fractree, selecciona l'arxiu bush2.fra i fes clic a Acceptar.
- En la següent finestra observa com es genera el fractal, prestant atenció a les caselles Axiom i Rules. Fes clic en OK.
- Selecciona Display / Statge 1 i observa el resultat.
- Selecciona Display / Statge 2 i observa el resultat. Repetix el mateix procediment per a visualitzar les successives pantalles. Selecciona Display / Next Statge o polsa CTRL+N per a passar d'un estat al següent.



- Utilitza el mateix procediment per a explorar els fractals situats en els arxius cross, dragó, hilbert, island, koch, peano.



- **COM GENERA FRACTALS FRACTREE**

Fractree utilitza un procediment recursiu per a generar fractals. En este procés, cada caràcter en la cadena d'entrada que actua d'axioma és substituïda per la corresponent regla. La regla conté una cadena substitutiva per a cada caràcter ASCII. Algunes cadenes són equivalents als corresponents caràcters en regles senzilles com la cadena "A" que és substituïda per "A". Altres cadenes especifiquen regles no trivials com en la corba de Koch, en la que la cadena "F" és substituïda per "F-F++F-F".

La cadena inicial s'anomena axioma. Per a la corba de Koch, l'axioma és "F", però pot ser més complicada per a altres fractals. L'axioma és l'estat 0 del fractal. L'estat n del fractal s'obté per substitució de tots els caràcters de la cadena de l'estat n-1 d'acord amb les regles. Este és un procés recursiu, perquè genera cada vegada cadenes més i més complicades. Estes cadenes són interpretades per una tortuga que va dibuixant l'estructura fractal.

A continuació es mostren els primers estats de la corba de Koch, que hem pres com a exemple:

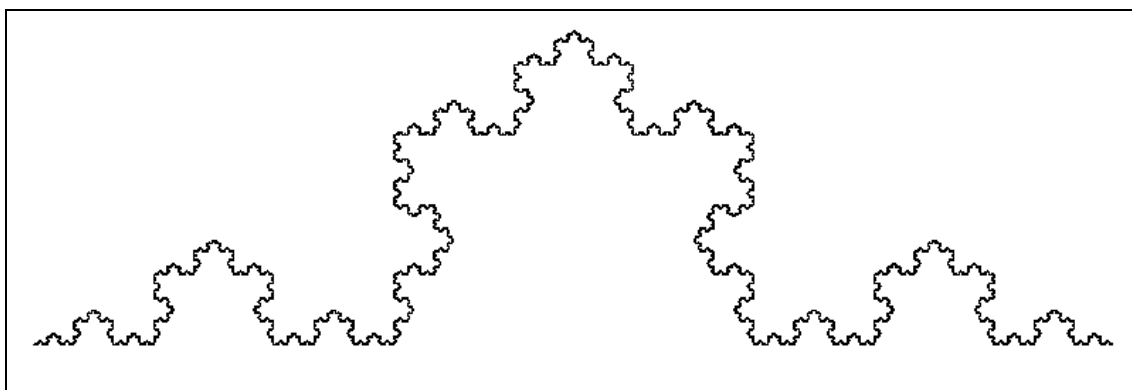
Estat 0: "F"

Estat 1: "F-F++F-F"

Estat 2: "F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F"

Estat 3: "F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++
 F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++
 ++F-F++F-F-F-F++F-F"

- Per a veure este fractal, obri l'arxiu koch.fra i selecciona l'estat en el menú Display.



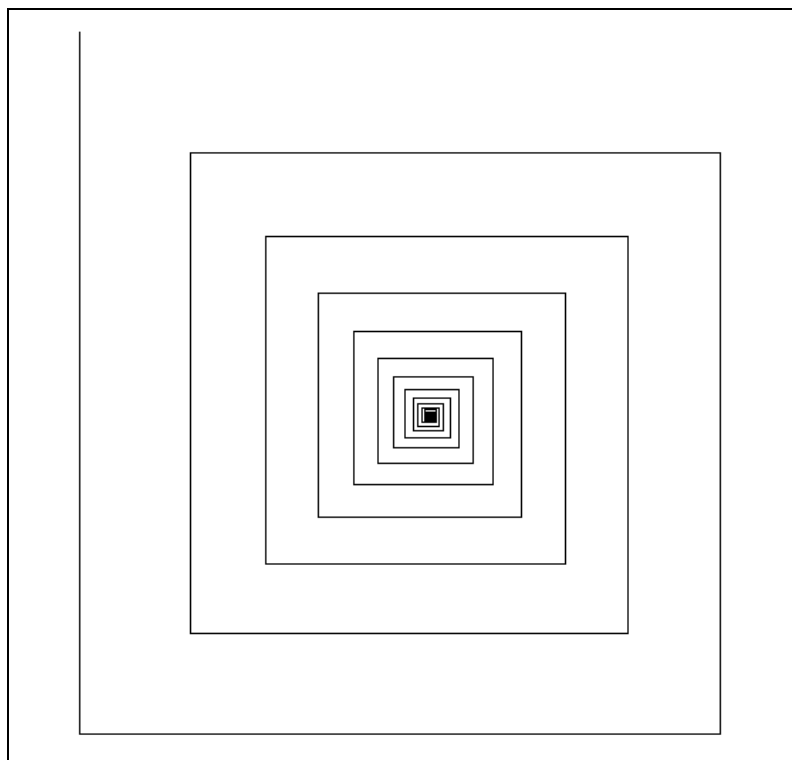
- **Tortuga gràfica**

Els gràfics són dibuixats per una tortuga. La imaginària tortuga interpreta una cadena de caràcters i canvia la seua posició o direcció d'acord amb el caràcter llegit. Els següents caràcters són reconeguts per la tortuga com a comandaments:

"F"	Avança un pas (de la grandària actual) i dibuixa una línia
"f"	Avança un pas sense dibuixar una línia
"+"	Gira un angle δ en el sentit de les agulles del rellotge
"_"	Gira un angle δ en sentit contrari a les agulles del rellotge
" "	Gira 180 graus (dóna mitja volta).
"["	Guarda l'estat de la tortuga en memòria; fa un nuc d'una branca.
"]"	Restaura l'estat anterior de la tortuga des de la memòria. Açò ocasiona que la tortuga torne al punt on arranca la branca.
"*" (asterisc)	Incrementa la grandària del pas en un 10%.
"/" (barra)	Disminuïx la grandària del pas en un 10%.
"," (coma)	Canvia la grandària del pas aleatòriament.

Nota: Altres caràcters especials, com (!@#\$%^&) tenen usos especials en futures versions de Fractree. Els caràcters no citats en la taula anterior no tenen significat per a la tortuga, però són usats per a reescriure cadenes del sistema. En l'addició d'estos comandaments, el comportament de la tortuga està determinat per dos paràmetres: la grandària de pas i l'angle de gir α . La grandària del pas s'ajusta automàticament perquè la imatge resultant complete la pantalla. La grandària de la imatge està determinat per la configuració de la grandària del pas i la interpretació de la cadena de comandament, dibuixant la imatge resultant. Durant este procés, el cursor canvia a la grandària adequada.

- Selecciona el comandament File / *New*. A continuació tria el comandament Edit / Directions i en la caixa Number of Directions, escriu 4. Fes clic en OK.
- Selecciona Edit / Axiom. Escriu F i fes clic en OK.
- Selecciona Edit / Rules. Escriu la regla $F \rightarrow FXF$ i fes clic en el botó Add. Escriu la regla $X \rightarrow +*$ i fes clic en Add. Fes clic en OK.
- Per a guardar l'arxiu, selecciona el comandament File / Save rules as. En la caixa Nom d'arxiu escriu: c:\fractree\espi1.fra. i fes clic a Acceptar.
- Selecciona File / Open. En la llista desplegable d'arxius situats en la carpeta c:\fractree, selecciona l'arxiu espi1.fra i fes clic a Acceptar.
- Utilitzant el menú Display mostra distints estats del fractal que has creat i observa el resultat.



- Utilitza el procediment anterior per a definir un axioma, una regla i el nombre de direccions que permeten construir un fractal. Dissenya fractals utilitzant distints axiomes, regles i números de direccions.

6. La tortuga fractal: estructures arborescents

a) Arbres amb MsWLogo

- Inicia el programa MsWLogo, fent clic en Inici / Programes / MsWLogo / MsWinlogo. Amb este programa pots crear procediments que facen que la tortuga es desplace per la pantalla dibuixant les figures geomètriques que tu tries.
- A l'iniciar el programa, apareixen dos finestres: la pantalla de MsWlogo i la finestra Treball. En la finestra Treball es mostra una finestra d'història, on apareixen els comandaments i procediments que es van executant. Davall d'esta àrea es troba la línia d'entrada de comandaments.
- Per a comprovar el funcionament del programa, definirem un procediment que permet dibuixar un quadrat de qualsevol costat. Per a això fes clic en el menú Fitxer de la pantalla de MsWlogo i selecciona el comandament Editar. En la següent finestra introduïx el nom del procediment, QUADRAT :COSTAT i fes clic en OK.
- Apareix la finestra Editor, que mostra la primera i última línia del procediment. Tecleja en esta finestra el contingut del procediment:

```

PARA QUADRAT :COSTAT
REPITE 4 [AV :COSTAT GD 90]
FIN

```

- Fes clic en Fitxer, en la barra de menús de la finestra Editor, i selecciona Guardar i eixir.
- Observa que el cursor apareix en la línia de comandaments, davall de l'àrea d'història (en la finestra de Treball). Per a comprovar el funcionament del procediment, tecleja:

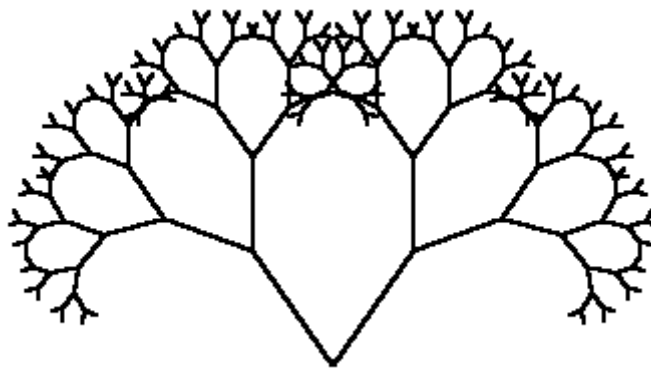
QUADRAT 90 i fes clic a Ejecutar.

QUADRAT 70 i fes clic a Ejecutar.

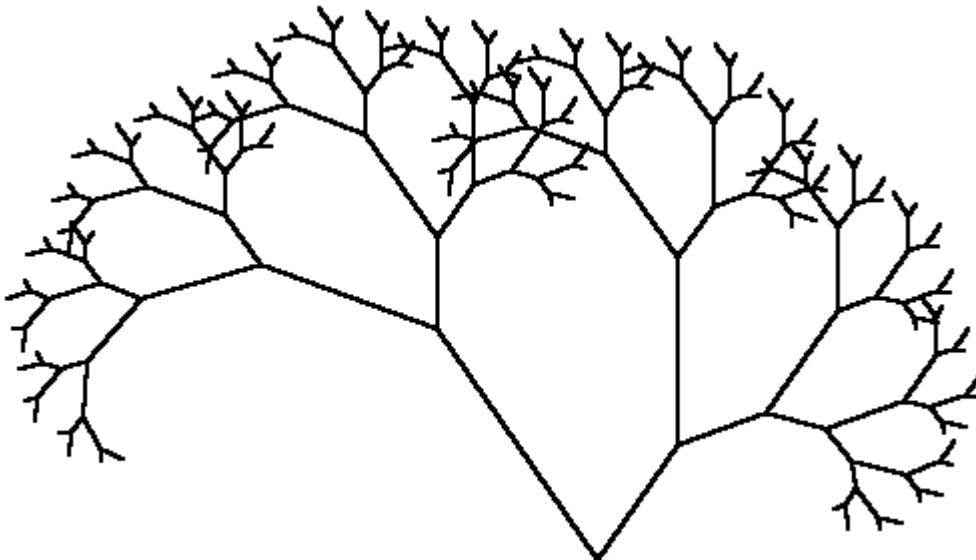
QUADRAT 50 i polsa ENTER.

QUADRAT 100 i polsa ENTER.

- Borra la pantalla, teclejant BP i fent clic a Ejecutar.
- Definirem els procediments ARBRE i ARBREB que permeten dibuixar els arbres següents:



ARBRE



ARBREB

- Fes clic en el menú Fitxer de la pantalla de MsWlogo i selecciona el comandament Editar. En la següent finestra introduïx el nom del procediment ARBRE :L :A i fes clic en OK o polsa ENTER. Les variables :L i :A representen, respectivament, *COSTAT* i *ANGLE*.

- En la finestra Editor tecleja el contingut del procediment ARBRE:

```

PARA ARBRE :L :A
SI 5 > :L [ALTO]
GI :A / 2
AV :L
ARBRE :L * 2 / 3 :A
RE :L
GD :A
AV :L
ARBRE :L * 2 / 3 :A
RE :L
GI :A / 2
FIN

```

- Fes clic en Fitxer, en la barra de menús de la finestra Editor, i selecciona Guardar i sortir.
- El cursor apareix en la línia de comandaments, davall de l'àrea d'història (en la finestra de Treball). Per a comprovar el funcionament del procediment, tecleja:

ARBRE 70 70 i fes clic a Ejecutar.

- Prova altres valors per al costat :L i l'angle :A
- Fes clic en el menú Fitxer de la pantalla de MsWlogo i selecciona el comandament Editar. En la següent finestra introdueix el nom del procediment ARBREB :L :A i polsa ENTER. Les variables :L i :A representen, respectivament, COSTAT i ANGLE.
- En la finestra Editor tecleja el contingut del procediment ARBREB:

```

PARA ARBREB :L :A
SI 5 > :L [ALTO]
GI :A / 2
AV :L * 2
ARBREB :L * 2 / 3 :A
RE :L * 2
GD :A
AV :L
ARBREB :L * 2 / 3 :A
RE :L
GI :A / 2
FIN

```

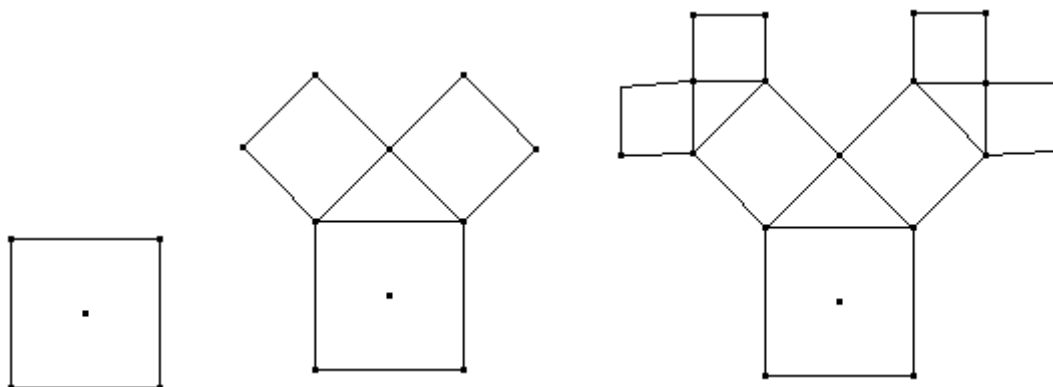
- Fes clic en Fitxer, en la barra de menús de la finestra Editor, i selecciona Guardar i sortir.
- El cursor apareix en la línia de comandaments, davall de l'àrea d'història (en la finestra de Treball). Per a comprovar el funcionament del procediment, tecleja:

ARBREB 70 70 i fes clic a Ejecutar.

- Prova altres valors per al costat :L i l'angle :A

b) Exercici: Arbres Pitagòrics amb MsWLogo

- Definix un procediment de MsWLogo que permeti generar arbres pitagòrics com el següent:

**7. Fractals amb la calculadora gràfica****a) Com crear i editar un programa amb la calculadora TI-83**

Per a crear un programa, segueix estos passos:

- Posa [PRGM] [◀] per a visualitzar el menú PRGM NEW.
- Posa [ENTER] per a seleccionar el comando 1: Create New. Es mostrarà l'indicador Name= i s'activa el bloqueig alfabètic.
- Introduïx un nom per al programa, com a màxim de huit caràcters. El primer d'ells ha de ser forçosament una lletra.
- Posa [ENTER]. Es mostrarà l'editor de programes.
- Introduïx un o més mandats de programa. Una línia de mandats pot contindre qualsevol instrucció o expressió que es puga executar des de la pantalla principal. Cada línia de mandat comença amb un signe de dos punts (:). Els mandats sempre van separats per dos punts (:). En l'editor de programes es poden visualitzar menús i seleccionar elements dels mateixos. Quan acabes una línia de mandat, polsa [ENTER]: el cursor es desplaçarà a la següent línia.
- No cal introduir cap comandament especial per a indicar el final del programa. Per a eixir de l'editor de programes i tornar a la pantalla principal, cal polsar [2nd] [QUIT].

b) Com executar un programa

Per a executar un programa, comença en una línia en blanc de la pantalla principal i segueix estos passos:

- Polsa [PRGM] per a visualitzar el menú PRGM EXEC.
- Selecciona el nom del programa en el menú PRGM EXEC. Es copiarà prgmnombre en la pantalla principal (per exemple, prgmHOLA).
- Polsa [ENTER] per a executar el programa. Mentres s'executa el programa, es visualitza en pantalla l'indicador intermitent d'activitat.
- Per a detindre l'execució del programa, polsa [ON]. Es mostrarà el menú ERR:BREAK. Per a tornar a la pantalla principal, selecciona 1: Quit. Per a anar al punt en què es va produir la interrupció, selecciona 2: Goto.

c) Algunes instruccions útils en la creació de programes

Els següents mandats es poden trobar en el menú PRGM CTL (instruccions de control), que únicament es pot visualitzar al pulsar [PRGM] des de l'editor de programes. Estos elements del menú controlen el flux d'un programa en execució. Faciliten la repetició o l'omissió d'un grup de mandats durant l'execució d'un programa.

If	Crea una prova condicional, de manera que si la condició és falsa, llavors s'omet el mandat que segueix immediatament a If; si la condició és verdadera, llavors s'executa el següent mandat.
Then	Executa mandats quan If és verdader.
Else	Executa mandats quan If és fals.
For(Crea un bucle incremental : For(variable, principi, fi, increment).
While	Crea un bucle condicional, executant un grup de mandats mentres la condició siga verdadera.
Repeat	Crea un bucle condicional, repetint un grup de mandats fins que la condició siga verdadera.
End	Indica el final d'un bloc.

Pause	Realitza una pausa en l'execució del programa.
Lbl	Definix una etiqueta.
Goto	Va a una etiqueta.
IS > (Incrementa i ignora si és major que.
DS < (Disminuïx i ignora si és menor que.
Menú (Definix elements i opcions de menú.
prgm	Executa un programa com una subrutina.
Return	Torna des d'una subrutina.
Stop	Deté l'execució.
DelVar	Borra una variable des d'un programa.
GraphStyle(Designa l'estil del gràfic que es dibuixa.

d) Un programa per a crear el triangle de Sierpinski.

El següent programa fa un dibuix d'un famós fractal, el triangle de Sierpinski, i l'emmagatzema en una imatge. Per a començar, polsa [PRGM] [▶] [▶] [1]. Assigna al programa el nom SIERPINS i polsa [ENTER]. Es mostrarà l'editor de programes.

PROGRAM: SIERPINS

: FnOff : ClrDraw

: PlotsOff

: AxesOff

: 0 → Xmin : 1 → Xmax

: 0 → Ymin : 1 → Ymax

→ Define la ventana de visualización

: rand → X : rand → Y

: For (K, 1, 3000)

: rand → N

→ Inicio del grupo For

```

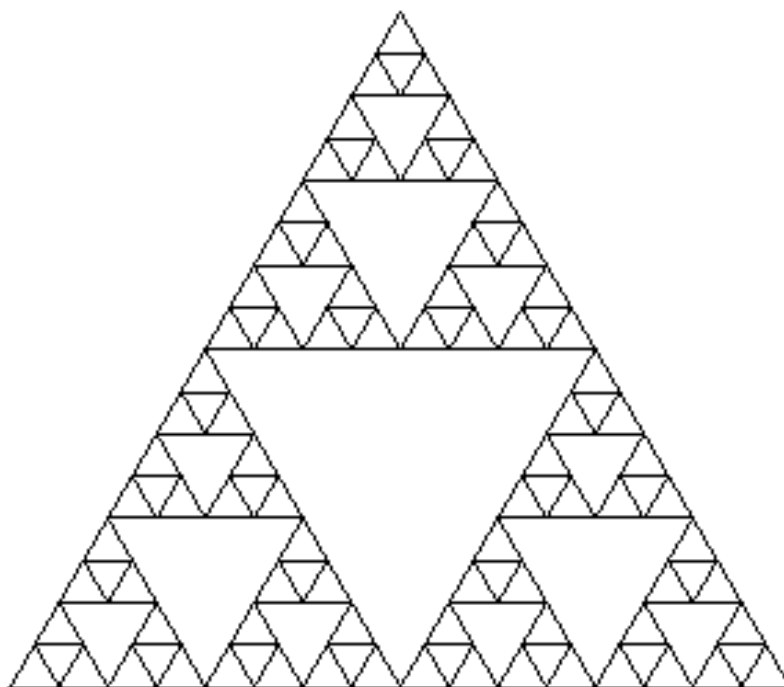
:If N ≤ 1/3 }
:Then
:.5X → X } → Grupo If / Then
:.5Y → Y
:End

:If 1/3 < N and N ≤ 2/3 }
:Then
:.5(.5 + X) → X } → Grupo If / Then
:.5(1 + Y) → Y
:End

:If 2/3 < N }
:Then
:.5(1 + X) → X } → Grupo If / Then
:.5Y → Y
:End

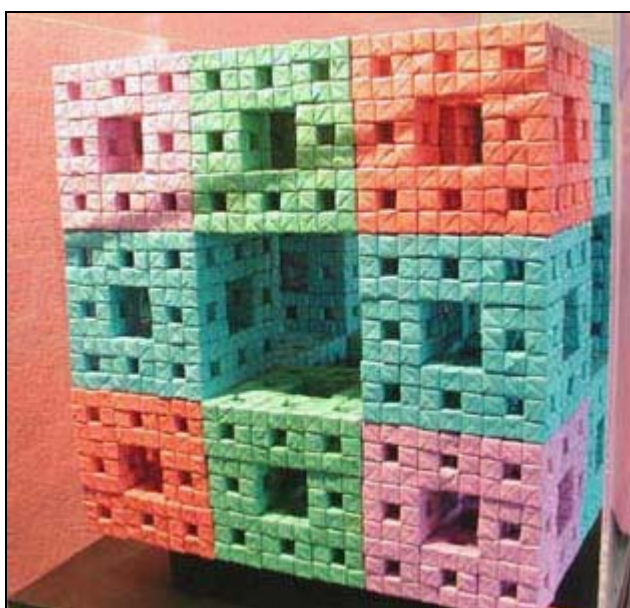
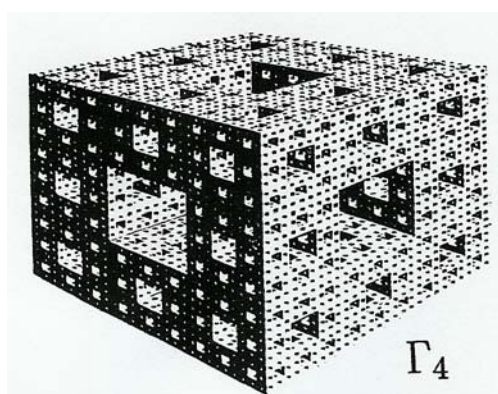
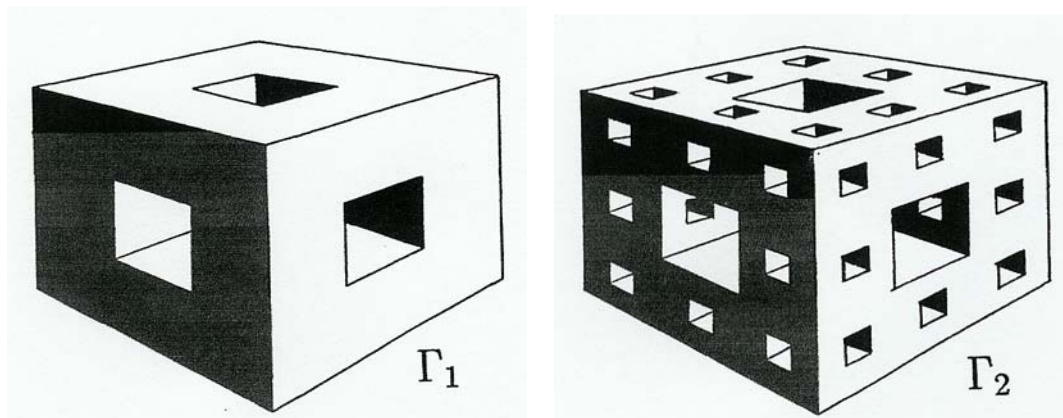
:Pt-On(X, Y) → Dibuixa un punt
:End → Fi del grup For
:StorePic 6 → Magatzema la imatge
    
```

Després d'executar este programa, pots recuperar i visualitzar la imatge per mitjà de la instrucció RecallPic 6.



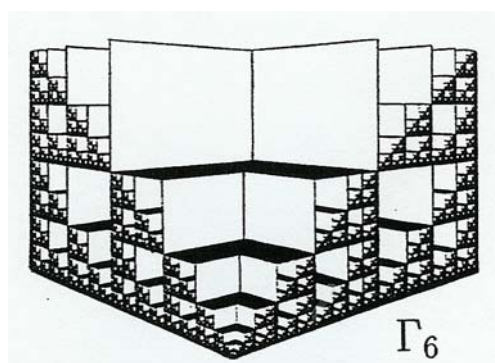
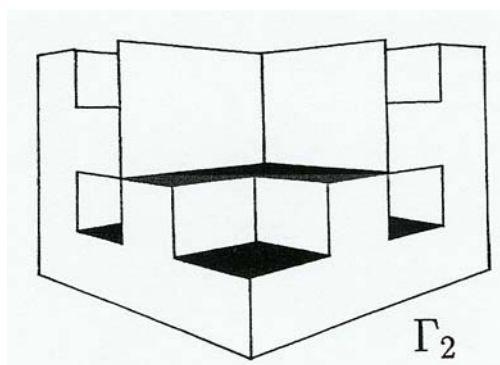
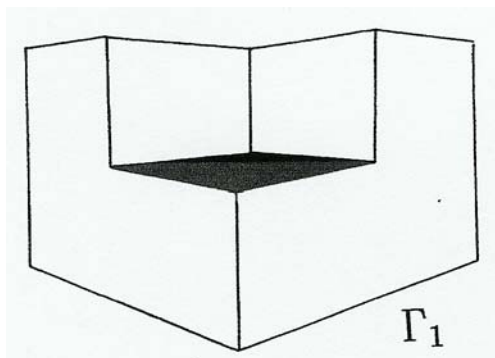
8. Fractals tridimensionals

A més dels fractals bidimensionals clàssics, com els vistos en apartats anteriors, existixen també fractals tridimensionals, basats en el cub. És el cas de l'esponja de Sierpinski-Menger-Sierpinski-Menger, que descrivim a continuació en tres dels seus primers passos de construcció $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$.



- Un altre exemple:

A continuació presentem un altre exemple de fractal en 3 dimensions, construït de forma geomètrica senzilla. És conegut popularment com la "tarjeta fractal". Mostrem els tres primers passos de la seua construcció $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_6$. La seua dimensió fractal és de 2,807, com es pot comprovar.



BIBLIOGRAFIA SOBRE FRACTALS

IDEES PER A LA CLASSE

- *FRACTALS FOR THE CLASSROOM*. Peitgen, Jürgens, Saupe. SPRINGER-VERLAG. New York (2 tomos). No hi ha traducció al castellà. Els autors són professors de Secundària i Universitat als Estats Units i mostren un projecte educatiu que utilitza els fractals com a instrument per a tractar tot el currículum de matemàtiques de Secundària.
- *ESTRUCTURAS FRACTALES Y SUS APLICACIONES*. Miguel de Guzmán, Miguel Ángel Martín y otros. LABOR.
- *¿JUEGA DIOS A LOS DADOS?*. Ian Stewart. GRIJALBO EDITORIAL. Un magnífic llibre de divulgació amb nombrosos i divertits exemples.
- *FRACTAL CUTS*. Diego Uribe. TARQUIN PUBLICATIONS. Stradbroke Diss Norfolk IP21 5JP. England. Tel. 01379384218. Una bonica carpeta de material amb retallables per a construir targetes de felicitació fractals.
- *THE BEAUTY OF FRACTALS*. Peitgen y Richter. SPRINGER-VERLAG. Berlín.

LLIBRES "UN POC MÉS ESPECIALITZATS"

- *LA GEOMETRÍA FRACTAL DE LA NATURALEZA*. Benoit Mandelbrot. TUSQUETS EDITORES. METATEMAS.
 - *LOS OBJETOS FRACTALES*. Benoit Mandelbrot. TUSQUETS EDITORES. METATEMAS.
 - *FRACTALS*. Jens Feder. PLENUM PRESS. New York-London.
 - *FRACTAL GEOMETRY*. K. Falconer. JOHN WILEY Y SONS.
 - *CHAOS AND FRACTALS*. Peitgen, Jürgens y Saupe. SPRINGER-VERLAG. New York.
 - *THE SCIENCE OF FRACTALS IMAGES*. Peitgen y Saupe. SPRINGER-VERLAG. New York.
-

ADRECES WEB INTERESSANTS

FRACTINT:

<http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html>

CABRI-GÉOMÈTRE II:

<http://education.ti.com/product/software/cabri/down/download.html>

MSWLOGO:

<http://www.softronix.com/logo.htm>

ÁREA FRACTAL:

<http://www.arrakis.es/~sysifus/index.html>

TEACHER ENHANCEMENT HOME PAGE:

http://www.math.fau.edu/Teacher/Teacher_homepage.htm

SIERPINSKI:

<http://wwwvis.informatik.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/examples/Sierpinski.html>
