ESTUDI I MANEIG DE LES

ESTRUCTURES ESPACIALS, LES FORMES I L'ART EN GEOMETRÍA

SESSIÓ 5

LLOCS GEOMÈTRICS I CORBES EN EL PLA

MAURICI CONTRERAS / RICARD PEIRÓ

LLOCS GEOMÈTRICS I CORBES EN EL PLA

Introducció

Encara que no se solen tractar en la Secundària Obligatòriament i generalment s'introduïxen en Batxillerat, especialment quan es tracten les còniques, els llocs geomètrics –i les corbes en general– constituïxen una matèria molt important dins de la geometria, que permet desenvolupar els processos habituals de pensament matemàtic, com ara: exploració, formulació de conjectures, comprovació, demostració, obtenció d'equacions, etc. Per això, ens pareix que este contingut hauria de desenvolupar-se des d'edats primerenques, sempre que s'utilitzen materials adequats. En esta sessió veurem alguns exemples d'activitats experimentades en l'ESO i l'ús del programa Cabri per a generar alguns llocs geomètrics i corbes famoses.

1. Llocs geomètrics i corbes en la ESO

- **DOS CIRCUMFERÈNCIES**

Dibuixa dos circumferències de radis arbitraris. Investiga les distintes posicions relatives de les dos circumferències. Estudia quines condicions s'han de complir perquè les dos circumferències siguen:

a) exteriors.

b) tangents exteriors.

c) tangents interiors.

d) interiors.

e) assecants interiors.

f) assecants exteriors.

- **PROPIETATS DEL ROMBE**

Dibuixa dos circumferències del mateix radi que siguen assecants. Unix els punts d'intersecció d'ambdós circumferències amb els seus centres. Quina figura s'obté?

Investiga les propietats d'esta figura:

- Què ocorre si doblegues el paper per la diagonal?. És una figura simètrica?. Quins són els eixos de simetria?.
- Els costats són iguals?
- En quin punt es tallen les diagonals?.
- Les diagonals són perpendiculars?.
- Els angles són iguals?. Hi ha parelles d'angles iguals?.
- Quant sumen els angles?.

- **MEDIATRIU D'UN SEGMENT**

Utilitzant una construcció anàloga a l'anterior, dibuixa la mediatriu del segment AB.

> ***Ajuda***: **Dibuixa dos circumferències assecants del mateix radi que tinguen els seus centres en els punts A i B.**

- **CIRCUMFERÈNCIES**

Traça un segment AB de 4 cm i dibuixa una circumferència que ho tinga com a diàmetre.

g) Troba altres dos circumferències que passen per A i B. Podries traçar més?.

h) Comprova que els tres centres estan alineats.

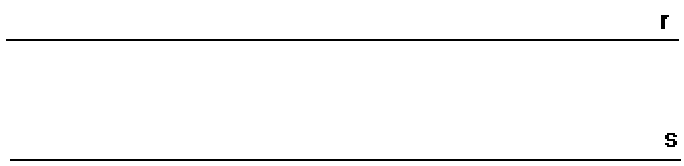
i) On estan situats els centres de les circumferències que passen per A i B?.

j) Alguna d'estes circumferències té radi 1 cm?.

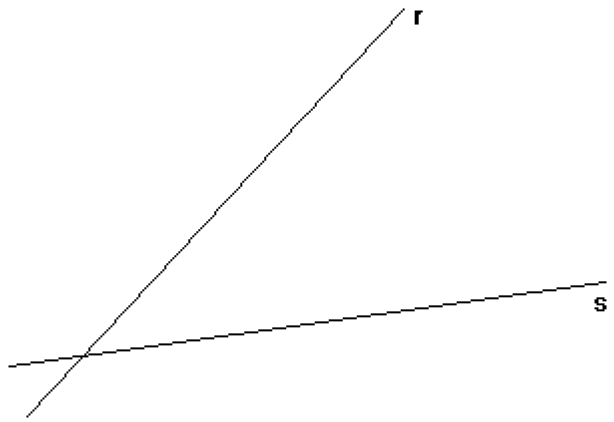
- **BISECTRIU D'UN ANGLE**

1) Dibuixa circumferències tangents a la següent recta, que tinguen totes el mateix radi. On estan situats els centres de les dites circumferències?.

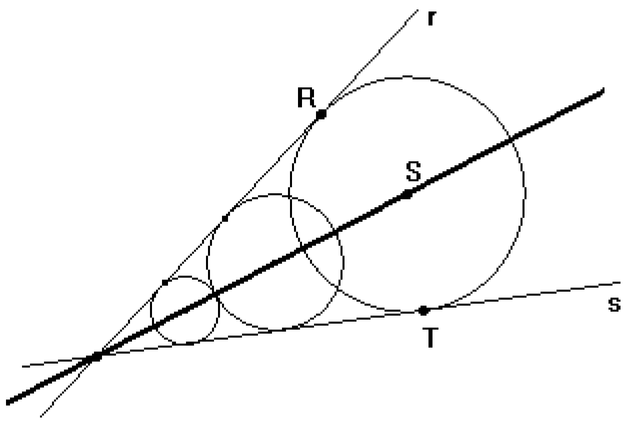
2) Dibuixa circumferències tangents simultàniament a les dos rectes paral·leles següents. On estan situats els centres de les dites circumferències?.



3) Dibuixa circumferències que siguen al mateix temps tangents a les dos rectes assecants de la següent figura. On estan situats els centres de totes elles?.

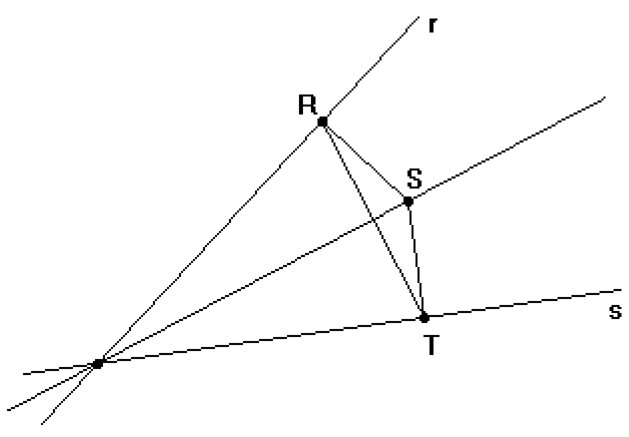


El lloc geomètric format pels centres de les circumferències tangents a dos rectes assecants s'anomena *bisectriu* de l'angle que formen dites rectes.

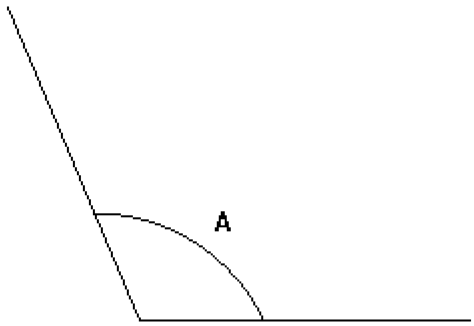


Donades dos rectes que es tallen, hi ha dos bisectrius, una per a cada angle que formen les rectes.

Si doblegues el paper per la bisectriu, coincidixen els dos costats de l'angle. Açò indica que la bisectriu és *eix de simetria* de l'angle. Per tant, els segments RS i ST de la figura són iguals, i a més, la bisectriu és perpendicular al segment RT.



4) Tenint en compte estes propietats i utilitzant una construcció anàloga a les de problemes anteriors, dibuixa la bisectriu de l'angle A.



***Ajuda*: Amb centre en A dibuixa una circumferència de radi arbitrari. Esta circumferència talla als costats de l'angle en dos punts, M'i N. Dibuixa la mediatriu del segment MN.**

- **CONSTRUÏX ROMBES**

Dibuixa un rombe que complisca les condicions donades en cada un dels casos següents:

k) Coneixent una diagonal, d, i un costat, l.

l) Donada la longitud del costat, l, i un angle (determinat per les rectes que contenen als seus costats).

m) Donades les longituds de les dos diagonals, D i d.

n) Explica detalladament tots els passos que seguixes per a fer les construccions.

- **COMETES**

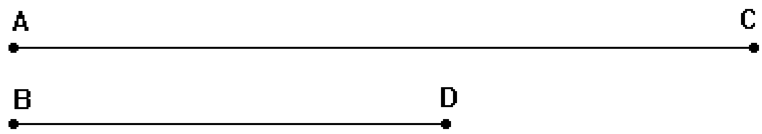
Dibuixa dos circumferències assecants que tinguen distints radis. Unix els punts d'intersecció de les dos circumferències amb els seus centres. Quina figura s'obté?

Investiga les propietats d'esta figura:

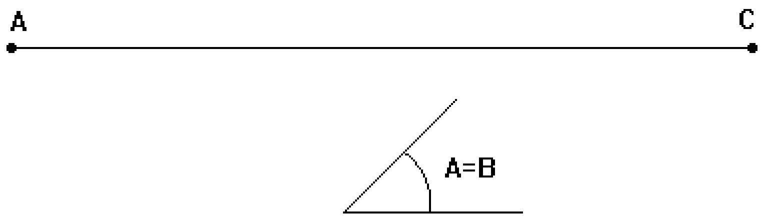
- Què ocorre si les circumferències són assecants exteriors?. I si són assecants interiors?.
- Què ocorre al doblegar el paper per una diagonal?. És simètrica?. Quants eixos de simetria té?. Quin és l'eix de simetria?. Com pots saber si una recta és o no eix de simetria?.
- Quant sumen els angles interiors?
- Són iguals els angles?.
- Hi ha parelles d'angles iguals?.
- Les diagonals es tallen al punt mitjà?.
- Les diagonals són perpendiculars?.

- **CONSTRUÏX I CLASSIFICA COMETES**

a) Dibuixa un cometa, sabent que els seus diagonals són els segments AC i BD de la següent figura i que l'eix de simetria és la diagonal AC.

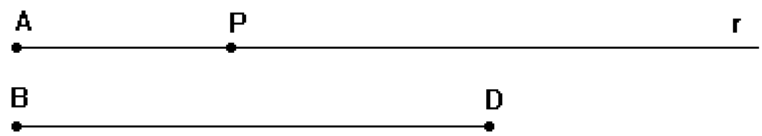


b) Dibuixa un cometa, sabent que el seu diagonal eix de simetria és el segment AC i que els angles $\angle A = \angle B$ son els indicats en la següent figura.

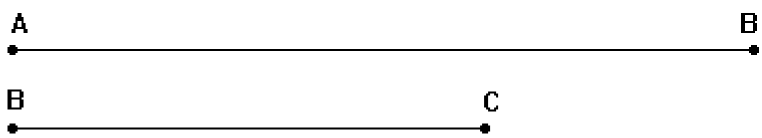


c) Dibuixa cometes que tinguen com a diagonal eix de simetria el segment AC de la figura, de manera que l'altra diagonal passe pel punt P del segment AC. Com es desconeix la longitud de la segona diagonal, es tracta que dibuixes diversos cometes que complisquen esta condició.

d) Dibuixa un cometa sabent que el seu eix de simetria és la recta r, té un vèrtex en el punt A de dita recta r, l'altra diagonal passa pel punt P de la recta r i té per longitud la del segment BD de la següent figura.



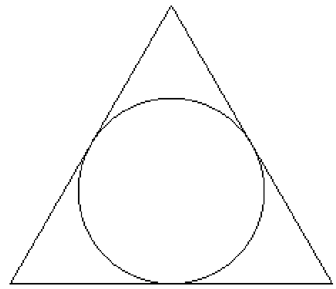
e) Dibuixa cometes, sabent que els seus costats tenen longituds iguals als segments AB i BC de la següent figura. Quants cometes complixen esta condició?.



f) Dibuixa cometes, sabent que el seu perímetre és el segment AB de la següent figura. Quantes solucions existixen?.

g) Classifica els cometes que has construït en els apartats anteriors. Algun d'ells és un rombe?. Algun és un quadrat?.

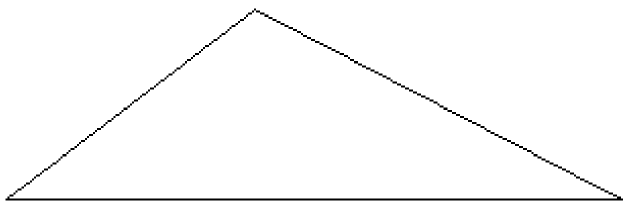
- **EL RELLOTGE**



Sobre una peça de forma triangular volem col·locar l'esfera d'un rellotge de manera que toque els costats, sense eixir-se de la peça. El rellotge té la grandària adequada perquè açò puga fer-se.

Les agulles del rellotge han d'estar muntades sobre un eix que travesse el tauler. Com determinar el millor possible el punt en què cal fer el forat?.

Per a començar, pots tractar el cas més senzill que la peça de fusta siga un triangle equilàter. Després intenta generalitzar a altres formes triangulars.



- **LA CABRA**

La senyora Rogelia, veïna d'Orelleta de Baix, té un prat sense assetjar en forma triangular i una cabra. Sabut és que les cabres són molt menjadores, i senyora Rogelia, que no vol tindre problemes amb la veïna, decidix lligar la cabra amb una corda a una estaca. Segons el lloc on clava l'estaca acurta o allarga la corda de manera que la cabra puga anar el més lluny possible però sense arribar a pasturar l'herba de la veïna. Els primers dies col·loca l'estaca de manera que arriba només a dos costats de cada un dels angles.

a) Fes un esquema aproximat de la situació.

b) On pot col·locar l'estaca?.

c) Com s'anomena geomètricament la figura que té esta propietat que tots els seus punts equidisten dels dos costats de l'angle?. Fes la construcció corresponent.

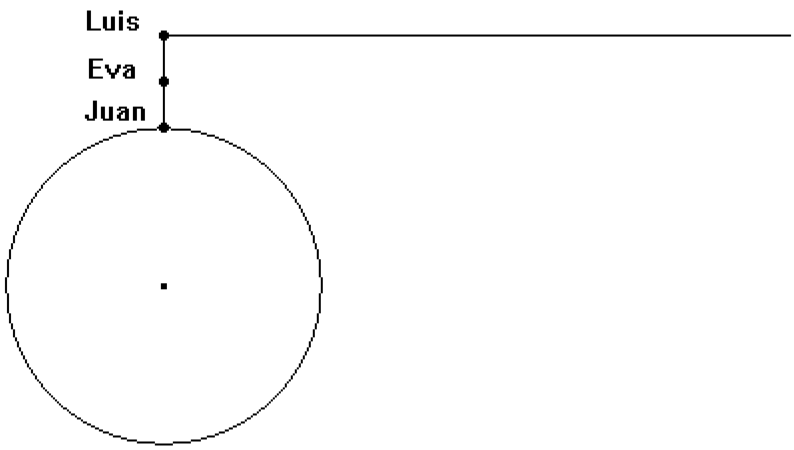
d) Dibuixa, amb regla i compàs, la major zona que podrà pasturar la cabra.

- **CERCLE I LÍNIA**

1) Lluis camina per una recta r i, al mateix temps, Joan ho fa per una circumferència. Partixen, amb la mateixa rapidesa, des de la posició més pròxima entre la línia i la circumferència. Eva es mou de manera que sempre està en el punt mitjà de la línia que unix les posicions de Lluis i de Joan. Dibuixa la trajectòria descrita per Eva en el seu passeig.

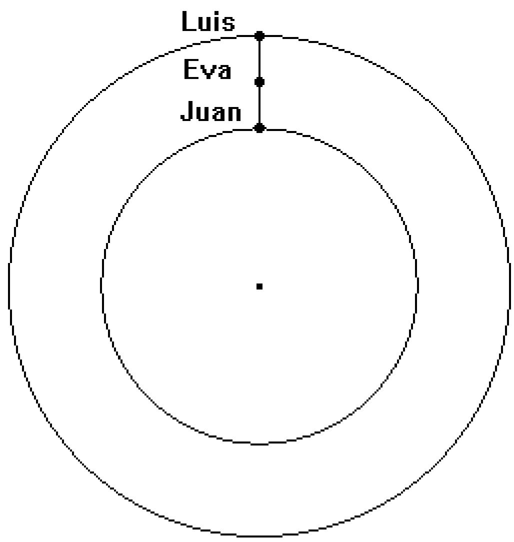
2) Lluis i Joan no van ara amb la mateixa rapidesa. Com serà la trajectòria d'Eva?. Prova, per exemple, en el cas en què la velocitat de Lluis siga el doble que la de Joan. Prova altres casos.

3) Ara Lluis i Joan inicien el seu passeig movent-se en sentits oposats.



- **DOS CIRCUMFERÈNCIES**

a) Lluis i Joan caminen per dos circumferències concèntriques. Partixen, amb la mateixa velocitat, des de dos punts alineats amb el centre de les circumferències. Eva es mou de manera que sempre està en el punt mitjà de la línia que unix les posicions de Lluis i de Joan. Dibuixa la trajectòria descrita per Eva en el seu passeig.



b) Lluis i Joan no van ara amb la mateixa rapidesa. Com serà la trajectòria d'Eva?. Prova, per exemple, en el cas en què la velocitat de Lluis siga el doble que la de Joan. Prova altres casos.

c) Ara Lluis i Joan inicien el seu passeig movent-se en sentits oposats.

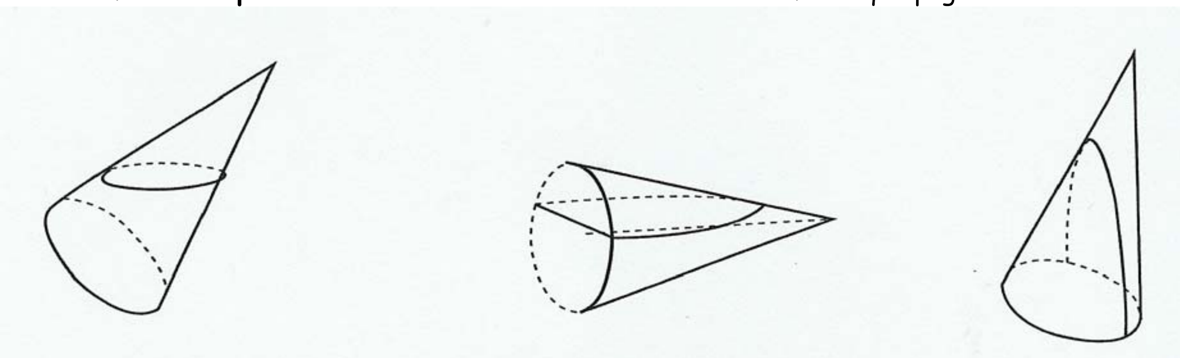
- **SECCIONS CÒNIQUES**

Les distintes figures que es poden obtindre al tallar una superfície cònica per un pla s'anomenen **seccions còniques** o, simplement, **còniques**.

o) Si el pla talla a totes les generatrius de la superfície, s'obtenen corbes denominades **el·lipses**. Intenta descriure el millor possible este tipus de corbes. És possible obtindre en este cas circumferències?. Com?.

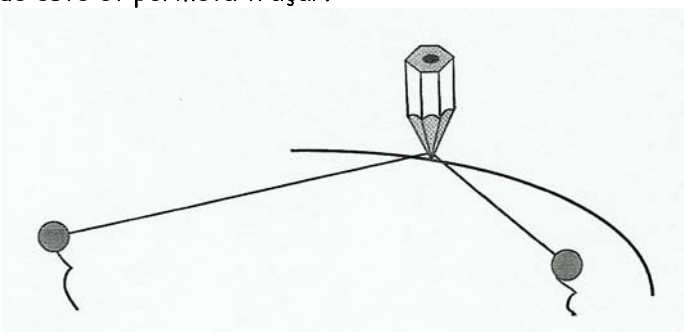
p) Si el pla talla a totes les generatrius, excepte a una, a la qual és paral·lel, s'obtenen corbes denominades **paràboles**. Tenen estes paràboles sempre la mateixa obertura, o al contrari, és possible aconseguir unes paràboles més dilatades i altres menys ?.

q) Si el pla talla a totes les generatrius, excepte a dos, a les quals és paral·lel, s'obtenen corbes denominades **hipèrboles**. Intenta descriure estes corbes el millor que pugues.



- **L'EL·LIPSE**

En un tauler de suro fixa una cartolina i clava dos xinxetes amb 12 cm de separació entre elles. Enllaça en cada una d'elles els extrems d'un fil de 20 cm de longitud. Mantenint el fil tens amb la punta del llapis, dibuixa la corba que este et permeta traçar.

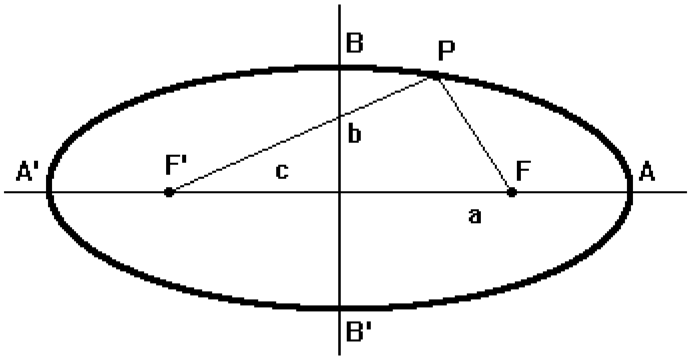


a) Quina cònica representa el traç obtingut?.

b) Per a un punt qualsevol P, a què és igual la suma de les distàncies de P a cada una de les xinxetes?. Ja que P és un punt qualsevol, quina és la condició general dels punts de la cònica?.

c) Quina corba obtindries si les dos xinxetes estigueren situades en el mateix punt?. I si estan separades una distància de 20 cm ?.

- **EXCENTRICITAT**



a) Quant val la suma AF+AF' ?. Quant val esta suma per a qualsevol punt P de l'el·lipse ?. Més concretament, quina relació existix entre el semieix major, a, i la suma de distàncies PF+PF' ?.

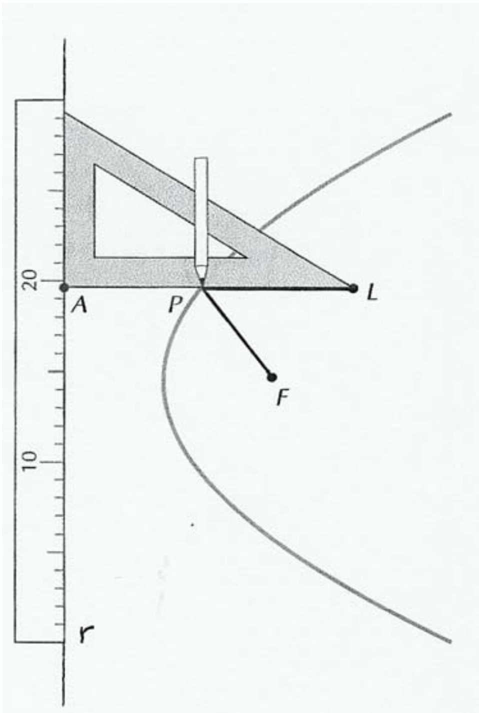
b) Quina relació existix entre a, b i c ?.

c) El major o menor aplatament d'una el·lipse es mesura per la seua excentricitat, que és el quocient: $e = \frac{c}{a}$ i oscil·la entre 0 i 1, ja que c està comprés entre 0 i a. Quina el·lipse s'obté si l'excentricitat val e = 0 ?.

- **LA PARÀBOLA**

Sobre un tauler de suro fixa una cartolina i clava xinxetes en el punt F i en l'extrem L del cartabó. A continuació fixa els extrems d'un fil en cada xinxeta. La longitud del fil ha de ser major que la distància del punt F a la regla.

Recolza el llapis sobre el cartabó, mantenint tens el fil. Espentant amb la punta del llapis, desplaça el cartabó sobre la regla. Al fer este moviment, el llapis dibuixarà una corba.

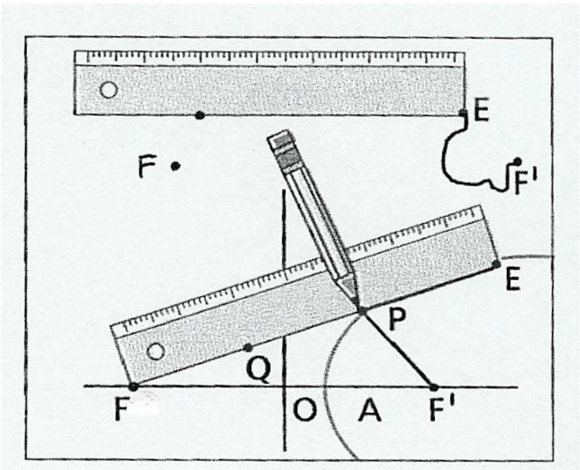


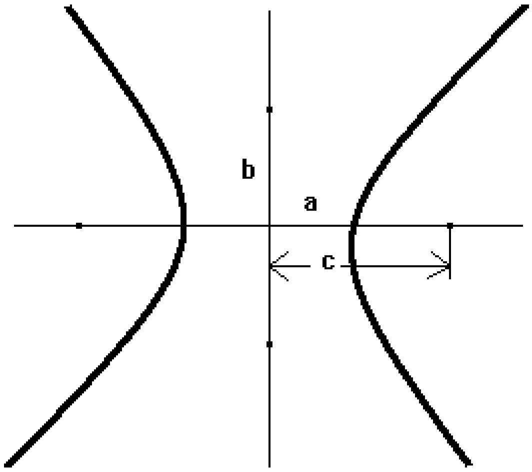
a) Quina cònica representa el traç obtingut?.

b) Per a qualsevol punt, P, de la corba obtinguda, mesura les distàncies de P a F i de P a la regla (recta r, denominada directriu). Com són estes distàncies?. Fes el mateix triant altres punts de la corba. Què observes?. Quina condició han de complir tots els punts d'esta cònica?.

- **LA HIPÈRBOLA**

En un tauler de suro fixem una cartolina i tres xinxetes en els punts F, F' i en l'extrem B de la regla. A continuació, fixem els extrems d'un fil a les xinxetes situades en F' i B. La longitud del fil ha de ser un poc superior a la mitat de la distància entre F i F'.





Recolzem l'altre extrem de la regla en la xinxeta situada en el punt F. Recolzem el llapis sobre la regla, de manera que tensione el fil i faça girar la regla amb centre de gir en F.

Al fer este moviment, la punta del llapis dibuixa una corba. Si repetixes els passos, intercanviant els papers dels punts F, F' i els dos extrems de la regla, obtindràs una altra branca de la corba.

a) Quina cònica representa el traç obtingut?.

b) Per a qualsevol punt P d'una mateixa branca de la corba, mesura les distàncies PF i PF' i calcula la diferència PF – PF' (o bé PF' – PF). Fes el mateix amb altres punts de la corba. Què observes?. Quina condició han de complir tots els punts d'esta cònica?. Més concretament, quina relació existix entre el semieix major, a, i la diferència de distàncies PF – PF' ?.

c) Quina relació existix entre a, b i c ?.

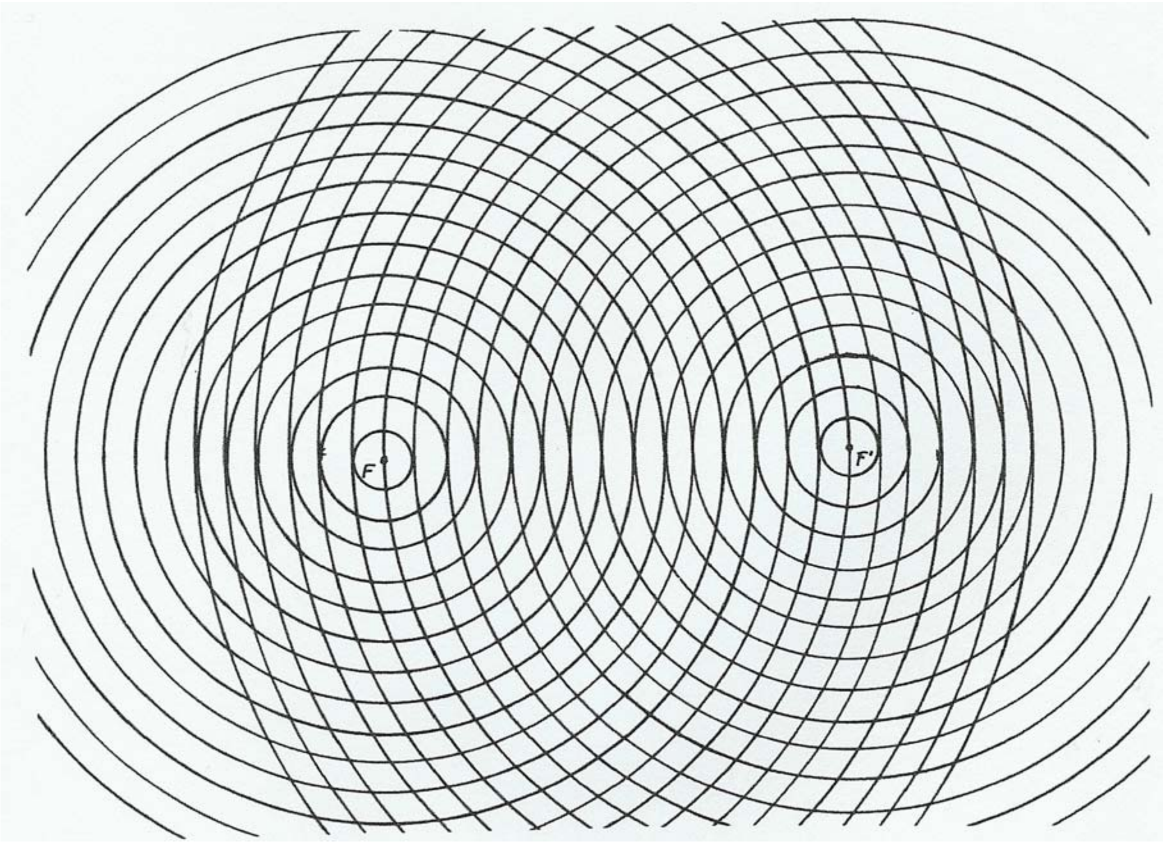
- **MES EXCENTRICITAT**

a) La major o menor obertura de les branques de la hipèrbola es mesura per la seua excentricitat, que és el quocient: $e = \frac{c}{a}$ i és sempre major que 1, ja que c és sempre major que a. Una hipèrbola té d'eix real 16 cm i d'eix imaginari 12 cm. Quina és la distància que separa als focus?. Quina és la seua excentricitat?.

b) L'excentricitat d'una hipèrbola val 2'6 i el semieix real mesura 10 cm. Troba la seua distància focal i el valor del semieix imaginari.

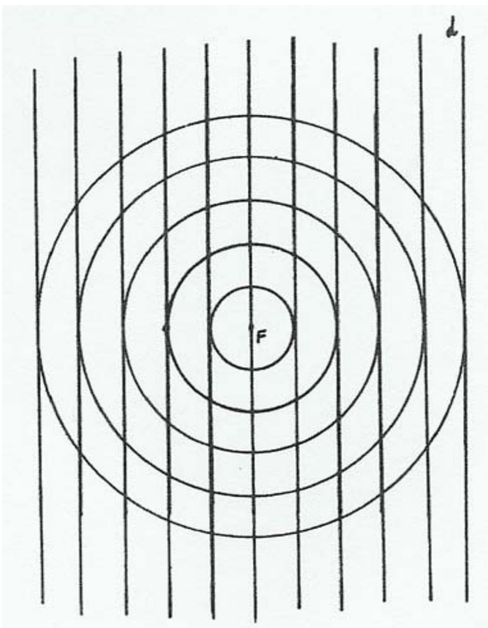
- **DIBUIXANT CÒNIQUES**

a) Ajuda't d'este paper per a dibuixar diverses hipèrboles (recordant la condició que han de complir tots els punts de la hipèrbola...).



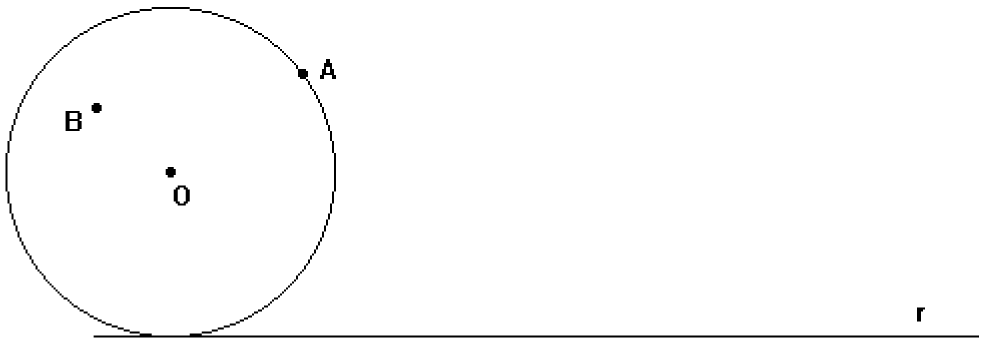
Utilitza la mateixa trama per a dibuixar el·lipses de distintes grandàries.

b) Utilitza la trama que seguix per a dibuixar paràboles, prenent com a directriu qualsevol de les rectes marcades.

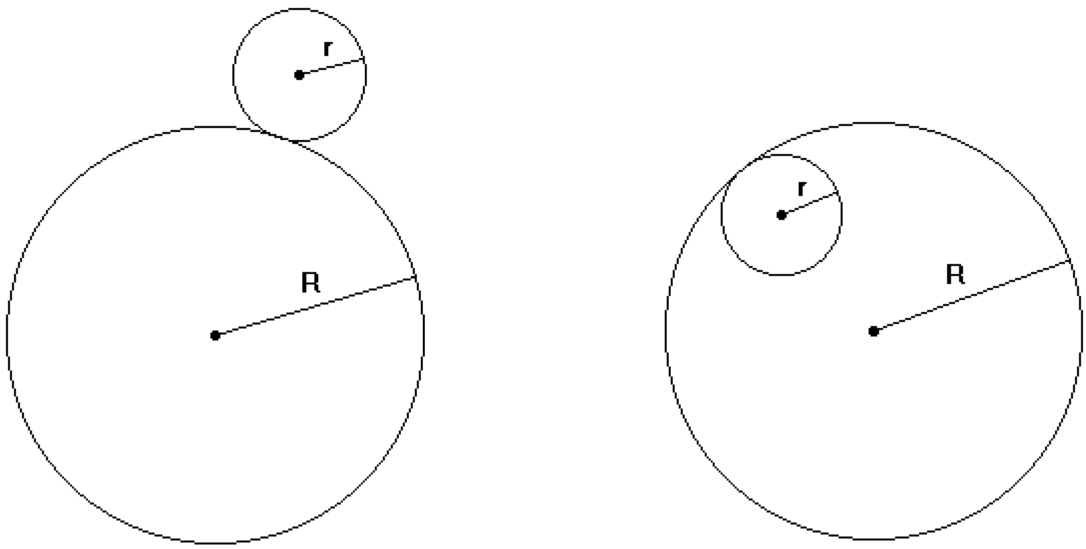


- **CORBES CÍCLIQUES**

a) Si el cercle de la figura gira sense lliscar sobre la recta r, quina corba descriurà el punt A de la circumferència del cercle?. Quina corba descriurà el punt B interior del cercle?. Atenció!.



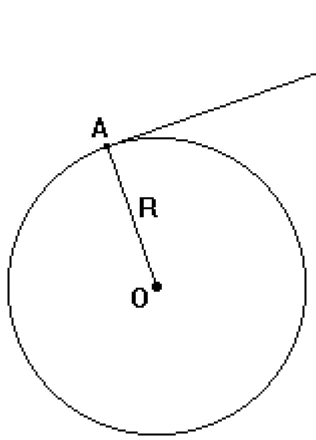
b) Disposem de dos cercles, de radis r i R, respectivament. Fem girar el cercle menor sobre el cercle major. Quina corba descriurà el punt A pertanyent a la circumferència del cercle menor?. I si fem girar el cercle menor per l'interior del cercle major?



c) Com és lògic, les corbes obtingudes, crides cicloides, tenen distintes formes, depenent de les longituds dels radis r i R, o més concretament, depenent dels valors del quocient r/R . Investiga que ocorre quan tal quocient és igual a 1 / 2, 1 / 3, 1 / 4, 1 / 6 i 1 / 8. Construïx en cada cas les plantilles adequades i obtín les corbes experimentalment. Algunes d'estes corbes tenen noms coneguts. Busca en un llibre de dibuix o de geometria els noms i procediments per a dibuixar-les.

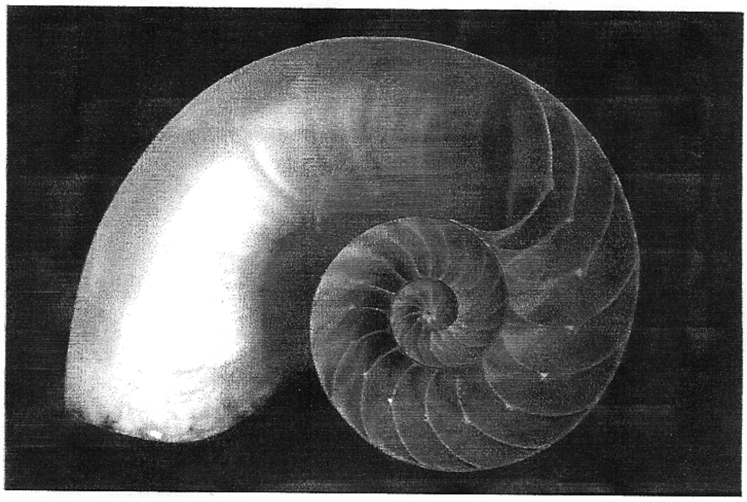
- **EVOLVENT**

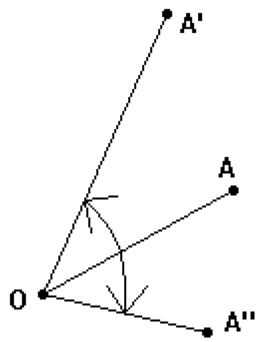
El segment AB gira, sense esvarar, sobre el cercle de centre O. Quina corba descriu l'extrem B del segment?. Intenta obtindre la dita corba experimentalment, amb ajuda d'una plantilla i un furgadents. Tin en compte que el segment AB ha de mantindre's sempre perpendicular al radi del cercle.



- **ESPIRALS**

La petxina del Nautilus dibuixa una meravellosa espiral. Ací tens una reproducció. Intenta descriure-la.





Et proposem que construïsques una espiral semblant a l'anterior, anomenada **espiral logarítmica**. Les instruccions són estes:

1) Tria dos punts, O i A. El punt O romandrà fix, mentres que el A descriurà l'espiral al voltant del punt O. El segment OA se sol anomenar **radi vector**.

2) Al mateix temps que el segment **OA** gira al voltant de **O**, **OA** es dilata, si el gir és en sentit positiu (contrari al de les agulles del rellotge), o es contrau, si el gir és negatiu. La raó de dilatació – contracció és de $1/1'1$, per cada grau girat.

OA' = OA x 1'1

OA" = OA : 1'1

Ordena les teues dades en una taula com la que seguix:

Angle (graus)	–30	–20	–10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Radi vector (cm)				1										

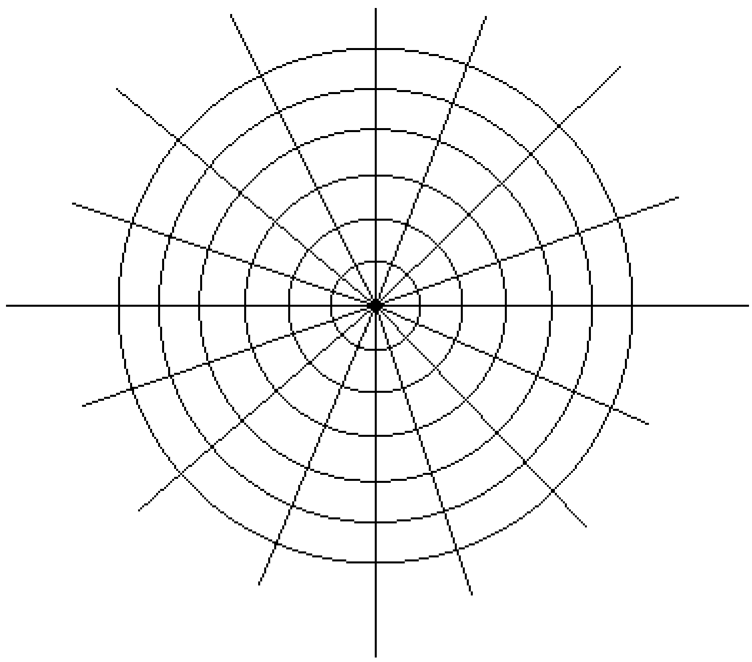
Quant valdrà el radi vector quan l'angle haja girat 125'5º ?.

Dibuixa l'espiral, tenint en compte la informació de la taula.

- **ALTRES ESPIRALS**

Coneixes l'espiral **d'Arquimedes** ?. Busca en un llibre de dibuix o de geometria procediments amb què pugues dibuixar una espiral d'Arquimedes.

Utilitza una trama de paper com la següent per a dibuixar una espiral d'Arquimedes:



Busca altres tipus d'espirals i esbrina la forma de dibuixar-les.

2. Llocs geomètrics i corbes amb Cabri

- **<u>L' EL·LIPSE I</u>**

Dibuixeu una el·lipse coneguts els focus i l'eix major.

a) Dibuixeu una circumferència C_1 de centre O (focus). El radi d'aquesta circumferència és l'eix major.

b) Dibuixeu un punt F (focus) interior a la circumferència.

c) Dibuixeu un punt Q sobre la circumferència C_1.

d) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, Q.

e) Dibuixeu la recta mediatriu m al segment $\overline{FQ}$.

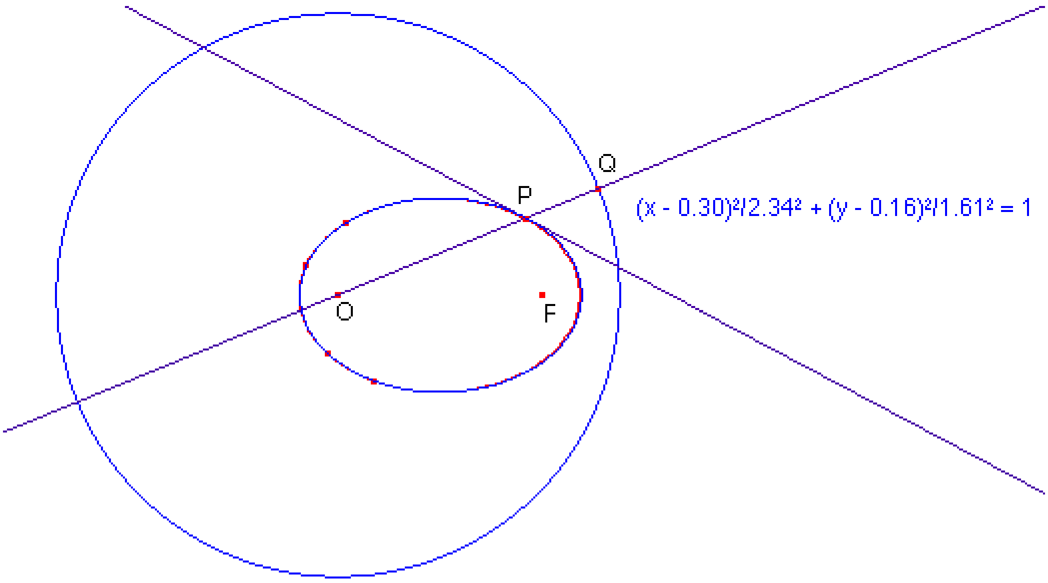
f) Feu la intersecció de les rectes r, m. Anomeneu el punt P.

g) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar Q sobre la circumferència.

h) Dibuixeu 4 punts sobre el lloc geomètric.

i) Dibuixeu la cònica que passa pels punts P i els 4 anteriors.

j) Determineu la seua equació.



- **LA HIPÈRBOLA**

Dibuixeu una hipèrbola coneguts els focus i l'eix major.

a) Dibuixeu una circumferència C_1 de centre O (focus). El radi d'aquesta circumferència és l'eix major.

b) Dibuixeu un punt F (focus) interior a la circumferència.

c) Dibuixeu un punt Q sobre la circumferència C_1.

d) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, Q.

e) Dibuixeu la recta mediatriu m al segment $\overline{FQ}$.

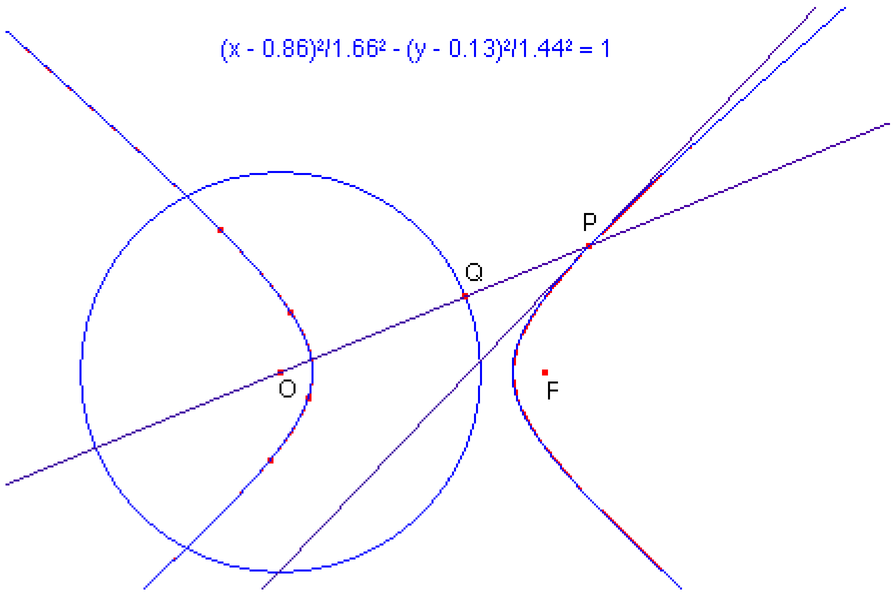
f) Feu la intersecció de les rectes r, m. Anomeneu el punt P.

g) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar Q sobre la circumferència.

h) Dibuixeu 4 punts sobre el lloc geomètric.

i) Dibuixeu la cònica que passa pels punts P i els 4 anteriors.

j) Determineu la seua equació.



- **EL·LIPSE II**

Dibuixeu una el·lipse coneguts els dos eixos.

a) Dibuixeu els punts O, A, B, tals que d(O,A)<d(O,B).

b) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A. El radi de la circumferència és el semieix menor.

c) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre O que passa pel punt B. El radi de la circumferència és el semieix major.

d) Dibuixeu un punt Q sobre la circumferència C_2.

e) Dibuixeu el segment $\overline{OQ}$.

f) Feu la intersecció del segment $\overline{OQ}$ i la circumferència C_1. Anomeneu el punt M.

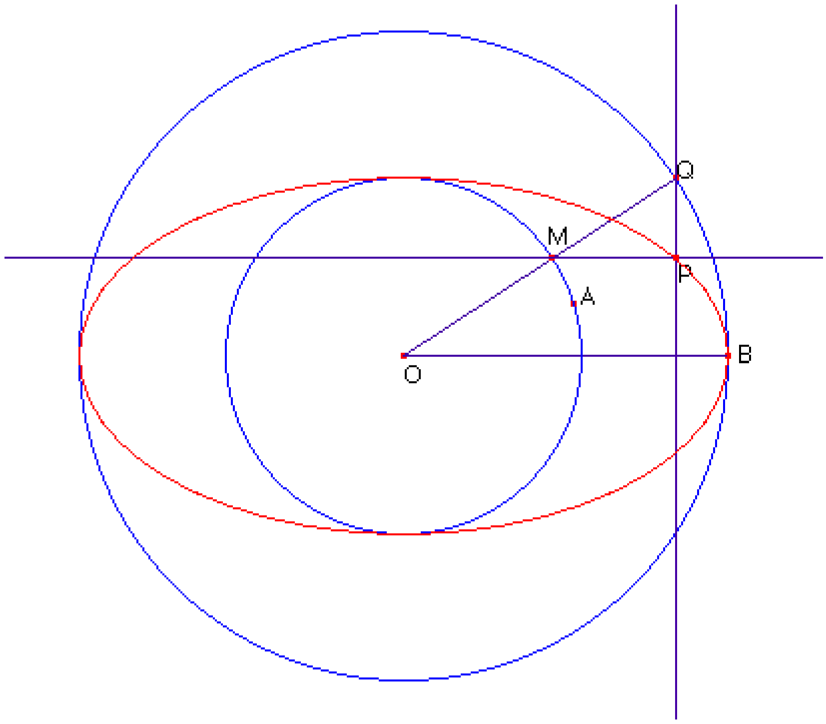
g) Dibuixeu el segment $\overline{OB}$.

h) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{OB}$ que passa pel punt Q

i) Dibuixeu la recta s paral·lela al segment $\overline{OB}$ que passa pel punt M

j) Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt P.

k) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar Q sobre la circumferència C_1.



- **CORBA D'AGNESI**

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Construïu una circumferència C_1 de radi r (per exemple r=2) tangent a l'eix OX en l'origen. (Noteu que el centre està en l'eix d'ordenades).

Definiu el valor del radi r=2.
Transferiu el valor r a l'eix d'ordenades. Anomeneu el punt R.
Dibuixeu la circumferència C_1 de centre R que passa pel punt O.

c) Construïu la recta s d'equació y=2r

Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix d'ordenades. Anomeneu el punt S.
Dibuixeu la recta s paral·lela a l'eix d'abscisses que passa pel punt S.

d) Dibuixeu un punt A sobre la recta s.

e) Dibuixeu la recta v que passa pels punts O, A.

f) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1. Anomeneu el punt B.

g) Dibuixeu la recta t perpendicular a l'eix OX que passa pel punt A.

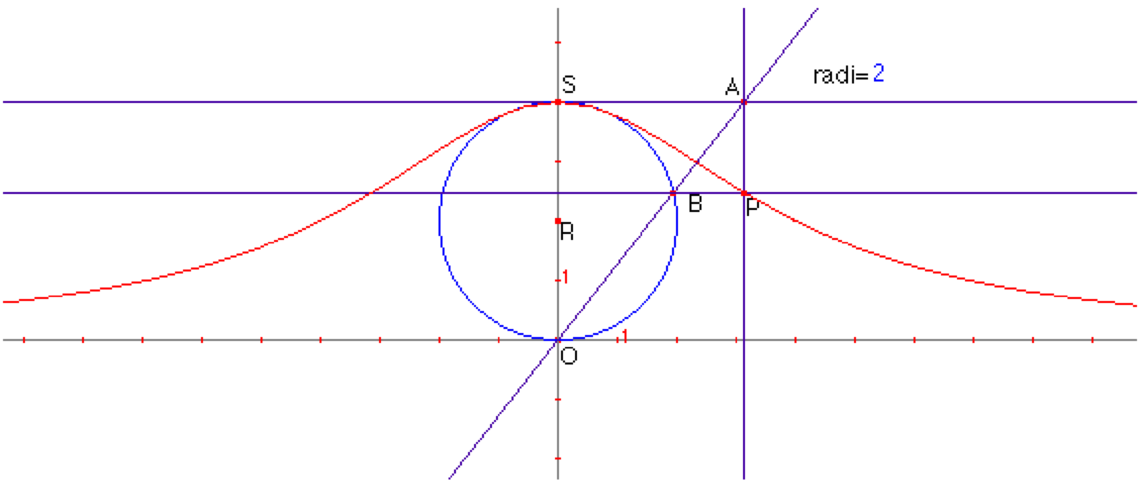
h) Dibuixeu la recta m perpendicular a l'eix OY que passa pel punt B.

i) Feu la intersecció de les rectes t, m. Anomeneu el punt P.

j) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar A sobre la recta s.

Aquesta corba anomenada d'*Agnesi* en homenatge a la matemàtica italiana Maria Agnesi (1718-1799) que la va citar en el seu llibre publicat en 1748, amb el nom de *versiera*.
L'equació cartesiana de la *corba d'Agnesi* és:

$$y = \frac{8r^3}{4r^2 + x^2}$$



- **LA CISSOIDE DE DIOCLES**

a) Construïu el sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Construïu una circumferència C_1 de radi r (per exemple r=2) tangent a l'eix OY en l'origen. (Noteu que el centre està en l'eix d'abscisses (r,0)).

Definiu el valor del radi r=2.
Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt U.
Dibuixeu la circumferència C_1 de centre U que passa pel punt O.

c) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix OX. Anomeneu el punt A(2r,0).

d) Dibuixeu la recta r perpendicular a l'eix OX que passa pel punt A.

e) Dibuixeu un punt R sobre la recta r.

f) Dibuixeu la recta s que passa pels punts O, R.

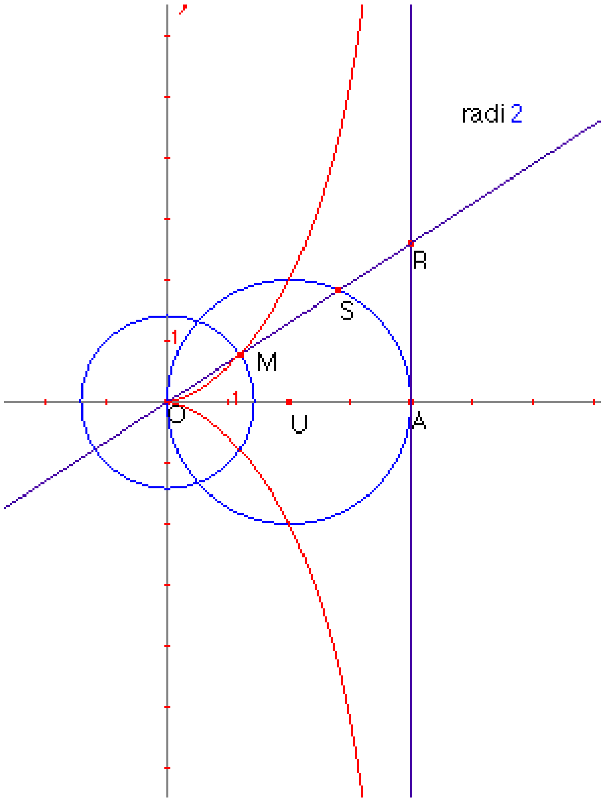
g) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1. Anomeneu el punt S.

h) Obteniu el punt M del segment $\overline{OS}$ tal que $\overline{OM} = \overline{RS}$
Dibuixeu la circumferència C_2 de centre O i radi $\overline{RS}$.
Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2. Anomeneu el punt M.

i) Dibuixeu el lloc geomètric del punt M al variar R sobre la recta r.

Aquesta corba s'anomena *cissoide de Diocles*. Aquesta corba va ser utilitzada al segle II AC per Diocles per a resoldre el problema de duplicar el cub.

L'equació cartesiana de la cissoide és:
$(x^2 + y^2) \cdot x = 2r \cdot y^2$
L'equació en forma polar és:
$$\rho = \frac{2r(\sin\theta)^2}{\cos\theta}$$



- **L'ESFEROIDE**

a) Construïu el sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Definiu el valor *a*=2.

c) Transferiu el valor *a* a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt A.

d) Dibuixeu un punt B sobre l'eix OY.

e) Determineu el punt M, N de la recta que passa pels punts A, B, tal que $\overline{BM} = \overline{OB}$ i $\overline{BN} = \overline{OB}$.

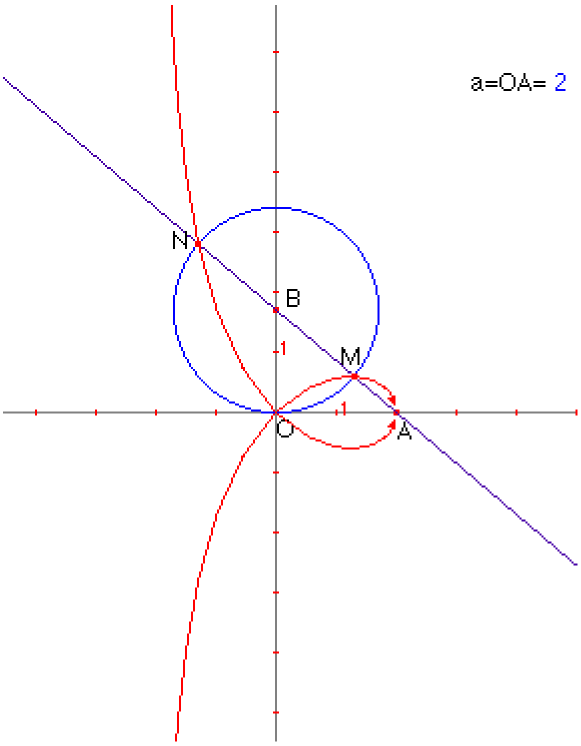
Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B que passa pel punt O.
Dibuixeu la recta r que passa pels punts A, B.
Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1. Anomeneu els punts M, N.

f) Dibuixeu el lloc geomètrics dels punts M, N, respectivament, al variar B sobre l'eix OY.

Aquesta corba s'anomena *esferoide*.
La referència més antiga que es té sobre la corba es troba en dues cartes de Torricelli 1635. Va ser estudiada per Moivre en 1715 i per Agnesi en 1748.

L'equació cartesiana de l'*esferoide* és:
$$x^3 + xy^2 + ay^2 - ax^2 = 0$$

L'equació en forma polar és:
$$\rho = \frac{a \cdot \cos(2\theta)}{\cos\theta}$$



- **LA LIMAÇON (CARAGOL) DE PASCAL I LA CARDIOIDE**

a) Construïu el sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Construïu una circumferència C_1 de radi r (per exemple r=1) tangent a l'eix OY en l'origen. (Noteu que el centre està en l'eix d'abscisses A(r,0)). Definiu el valor del radi r=1. Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomena el punt A. Dibuixa la circumferència C_1 de centre U que passa pel punt O.

c) Dibuixeu un punt B sobre la circumferència C_1.

d) Definiu el valor $l = \overline{BM}$ (per exemple l=1.5).

e) Transferiu el valor l al punt B.

f) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi l.

g) Dibuixeu la semirecta r d'origen O que passa pel punt B.

h) Feu la intersecció de la semirecta r i la circumferència C_2. Siga M el punt (el més allunyat de O).

i) Siga el punt N simètric del punt M respecte de B.

j) Dibuixeu el lloc geomètrics dels punts M, N, respectivament, al variar B sobre la circumferència C_1.

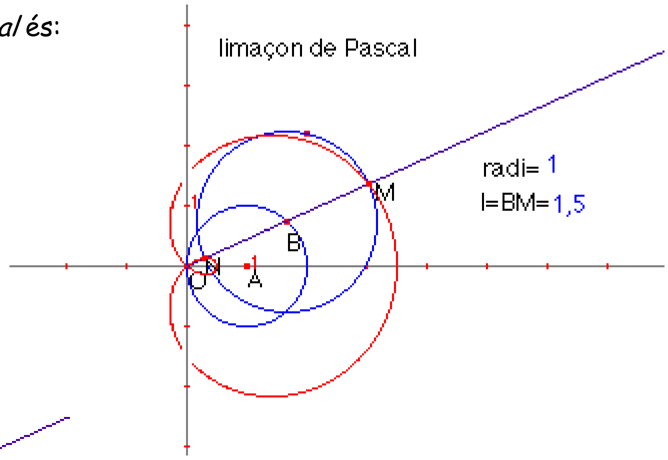
Aquesta corba s'anomena *limaçon (caragol) de Pascal*. En el cas que $\overline{BM} = \overline{BN} = 2r$ la corba s'anomena *cardioide*. Aquesta corba va ser estudiada per primera vegada pel francés Roberval 1630.

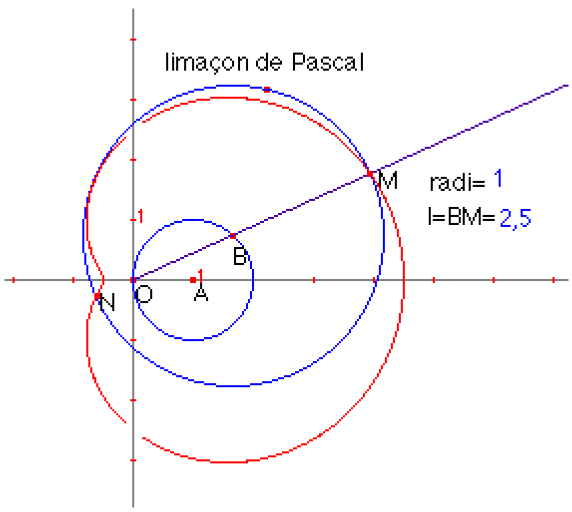
L'equació cartesiana de la *limaçon de Pascal* és:

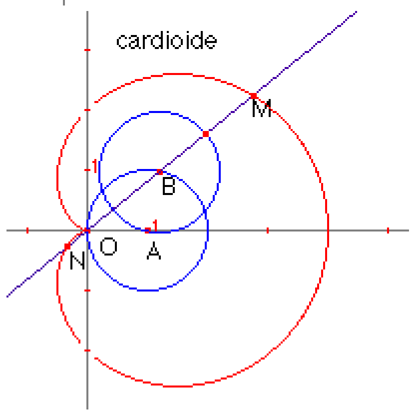
$$\left(x^2 + y^2 - rx\right)^2 = l^2(x^2 + y^2)$$

L'equació en forma polar és:

$$\rho = r\cos\theta + l$$







- **CONCOIDE DE NICOMEDES**

a) Dibuixeu la recta r.

b) Dibuixeu un punt O exterior a la recta r.

c) Dibuixeu un punt B sobre la recta r.

d) Definiu el valor $m = \overline{BM} = 2$.

e) Transferiu el valor m al punt B.

f) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi m.

g) Dibuixeu la semirecta s d'origen O que passa pel punt B.

h) Feu la intersecció de la semirecta s i la circumferència C_1. Siga M el punt (el més allunyat de O).

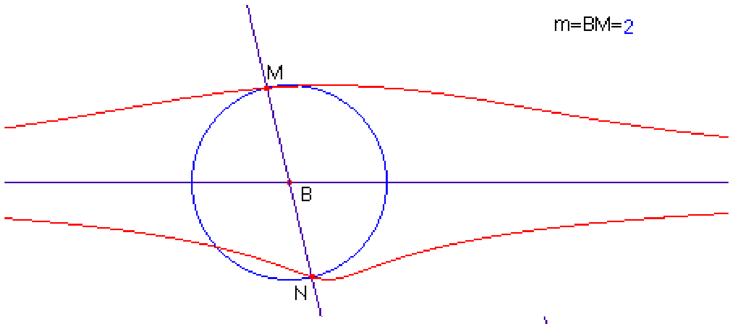
i) Dibuixeu el punt N simètric del punt M respecte de B.

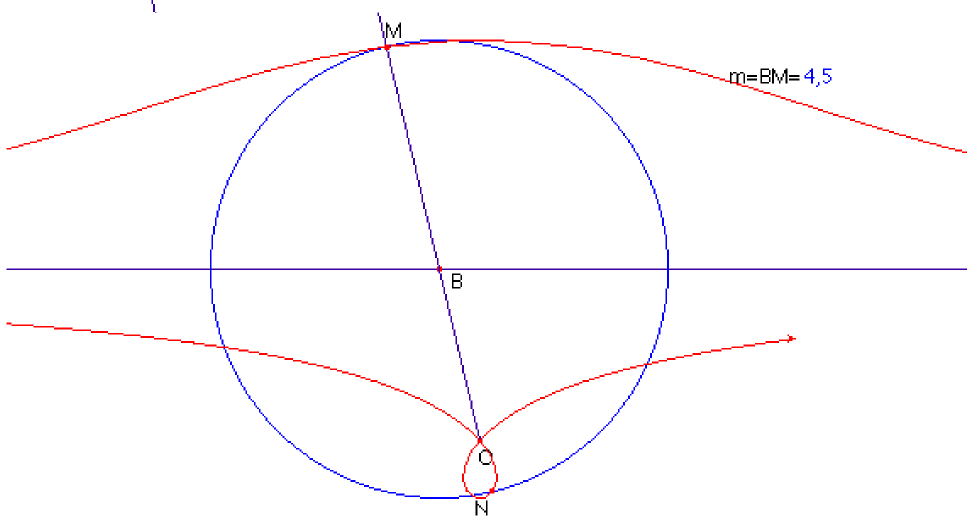
j) Dibuixeu els llocs geomètrics dels punts M, N al variar B sobre la recta r.

k) Canvieu m=4.5>d(O,B). Noteu com canvia la corba.

Aquesta corba s'anomena *concoide de Nicomedes* (segle II AC), creada per a resoldre el problema de la trisecció de l'angle. L'equació cartesiana de la concoide de Nicomedes és: $(x^2+y^2)(y-a)^2 - m^2y^2 = 0$

L'equació en forma polar és: $\rho = \frac{a}{\sin\theta} \pm m$ on $m = \overline{BM}$; $a = d(O,r)$





- **L'ASTROIDE**

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Dibuixeu un segment $\overline{AB}$.

c) Dibuixeu un punt N sobre l'eix OX.

d) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre N i radi $\overline{AB}$.

e) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix OY. Anomeneu els punt M, M'.

f) Dibuixeu la recta r perpendicular a l'eix OY que passa pel punt M.

g) Dibuixeu la recta s perpendicular a l'eix OX que passa pel punt N.

h) Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt P.

i) Dibuixeu el segment $\overline{MN}$.

j) Dibuixeu la recta t perpendicular al segment $\overline{MN}$ que passa pel punt P.

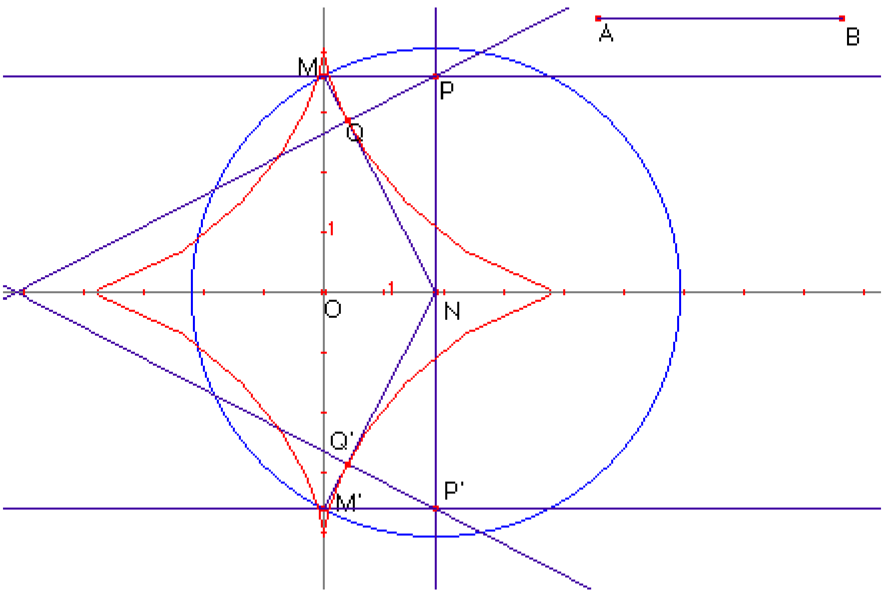
k) Feu la intersecció de la recta t i el segment $\overline{MN}$. Anomeneu el punt Q.

l) Anàlogament determineu el punt Q', partint del punt M'.

m) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts Q, Q', respectivament, al variar N sobre l'eix OX.

Aquesta corba s'anomena *astroide*.

L'equació cartesiana de l'astroide és: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ on $a = \overline{AB} = \overline{MN}$.



- **LA ROSA DE 4 PÈTALS.**

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Dibuixeu un segment $\overline{AB}$.

c) Dibuixeu un N punt sobre l'eix OX.

d) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre N i radi $\overline{AB}$.

e) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i l'eix OY. Anomeneu els punt M, M'.

f) Dibuixeu el segment $\overline{MN}$.

g) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{MN}$ que passa pel punt O.

h) Feu la intersecció de la recta r i el segment $\overline{MN}$. Anomeneu el punt P.

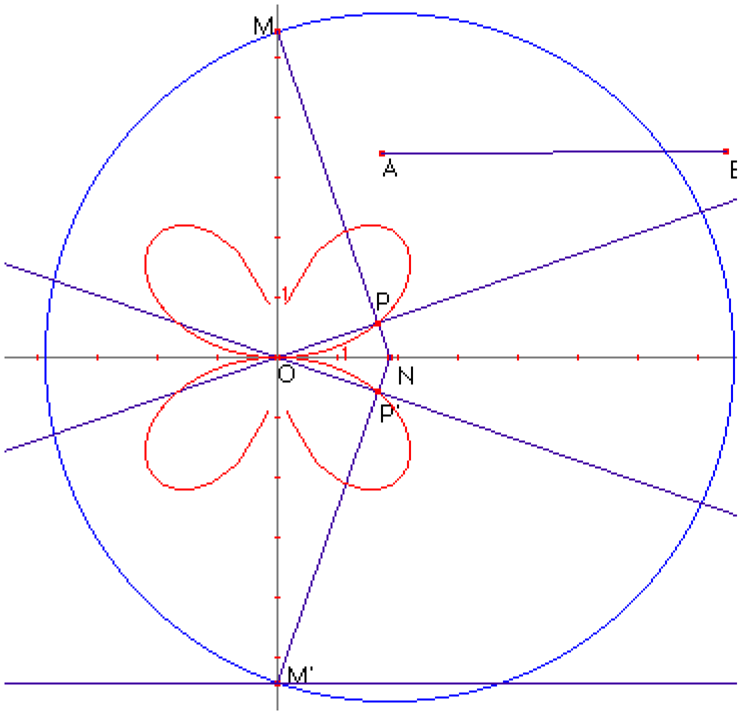
i) Dibuixeu el segment $\overline{M'N}$.

j) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{M'N}$ que passa pel punt O.

k) Feu la intersecció de la recta r i el segment $\overline{M'N}$. Anomeneu el punt P'.

l) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P', respectivament, al variar N sobre l'eix OX.

Aquesta corba s'anomena *rosa de quatre pètals*. L'equació en forma polar de la *rosa de quatre pètals* és: $\rho = a \cdot \sin(2\theta)$ on a és el radi de la circumferència circumscrita a la corba.



- **LEMNISCATA DE BERNOULLI**

Donats els punts $F_1(-a,0)$ $F_2(a,0)$ on $a>0$, el lloc geomètric dels punts del plànol que el producte de les distàncies a F_1,F_2 són iguals a a^2 s'anomena *lemniscata de Bernoulli*. Donada a conéixer per Jacques Bernoulli en 1694. Les propietats d'aquesta corba foren estudiades per G. Fagnano (1682-1766) i per Euler. L'equació cartesiana de la *lemniscata de Bernoulli* és: $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$. L'equació en forma polar és: $\rho^2=a^2\cos(2\theta)$. Construcció amb Cabri: Utilitzarem la propietat de la potència d'un punt respecte d'una circumferència.

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Definiu el valor a (per exemple a=3).

c) Traslladeu el valor a sobre l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt F_2.

d) Dibuixeu el punt F_1 simètric del punt F_2 respecte del punt O.

e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt F_2.

f) Dibuixeu un punt X sobre la circumferència C_1.

g) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, X.

h) Dibuixeu la recta s perpendicular a la recta r que passa pel punt X.

i) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre X i radi a: Opció compàs.

j) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2. Anomeneu el punt Y. Noteu que la potència del punt Y sobre la circumferència és a^2.

k) Dibuixeu un punt N de la circumferència C_1.

l) Dibuixeu la recta m que passa pels punts Y, N.

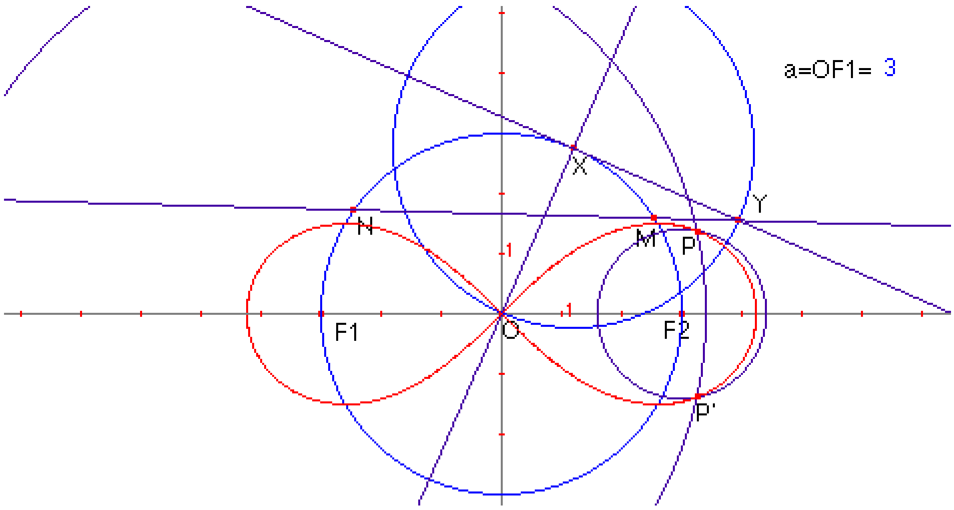
m) Feu la intersecció de la recta m i la circumferència C_1. Anomeneu el punt M. Noteu que $\overline{YM}\cdot\overline{YN}=a^2$.

n) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre F_1 i radi $\overline{YM}$.

o) Dibuixeu la circumferència D_2 de centre F_2 i radi $\overline{YN}$.

p) Feu la intersecció de les circumferència D_1,D_2. Anomeneu els punts P, P'.

q) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P', respectivament, al variar el punt N sobre la circumferència C_1.



- **CORBA DE CASSINI.**

Donats els punts $F_1(-a,0)$ $F_2(a,0)$ on $a>0$, el lloc geomètric dels punts del plànol que el producte de les distàncies a F_1,F_2 són iguals a k^2 s'anomena *corba de Cassini* (1680). Aquesta corba és conseqüència dels esforços de l'astrònom G. Cassini per tal d'entendre els moviments de la Terra al voltant del Sol. La corba de Cassini és una generalització de la lemniscata de Bernoulli. La seua equació cartesiana és: $x^4+y^4-2a^2x^2+2a^2y^2+2x^2y^2+a^4-k^4=0$.

L'equació en forma polar és: $\rho^4-2a^2\rho^2\cos(2\theta)+a^4=k^2$. La construcció amb Cabri és la següent:

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Definiu el valor a (per exemple a=2).

c) Definiu el valor k (per exemple k=2.1).

d) Traslladeu el valor a sobre l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt F_2.

e) Dibuixeu el punt F_1 simètric del punt F_2 respecte del punt O.

f) Traslladeu el valor k sobre l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt R.

g) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt R.

h) Dibuixeu un punt X sobre la circumferència C_1.

i) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, X.

j) Dibuixeu la recta s perpendicular a la recta r que passa pel punt X.

k) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre X i radi a: Opció compàs.

l) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2. Anomeneu el punt Y. Noteu que la potència del punt Y sobre la circumferència és k^2.

m) Dibuixeu un punt N de la circumferència C_1.

n) Dibuixeu la recta m que passa pels punts Y, N.

o) Feu la intersecció de la recta m i la circumferència C_1. Anomeneu el punt M. Noteu que $\overline{YM} \cdot \overline{YN} = k^2$.

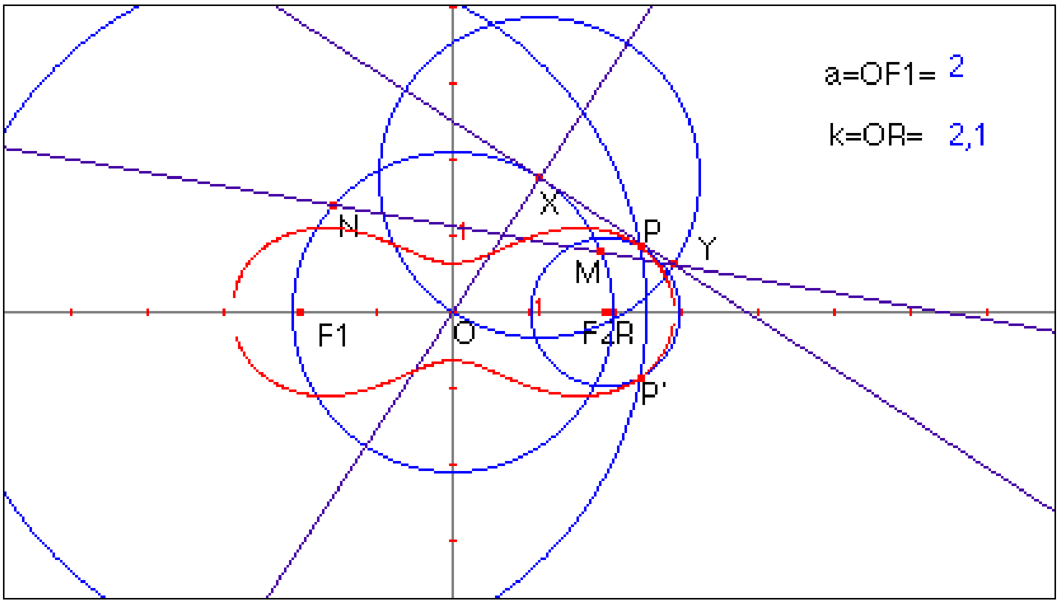
p) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre F_2 i radi $\overline{YM}$.

q) Dibuixeu la circumferència D_2 de centre F_1 i radi $\overline{YN}$.

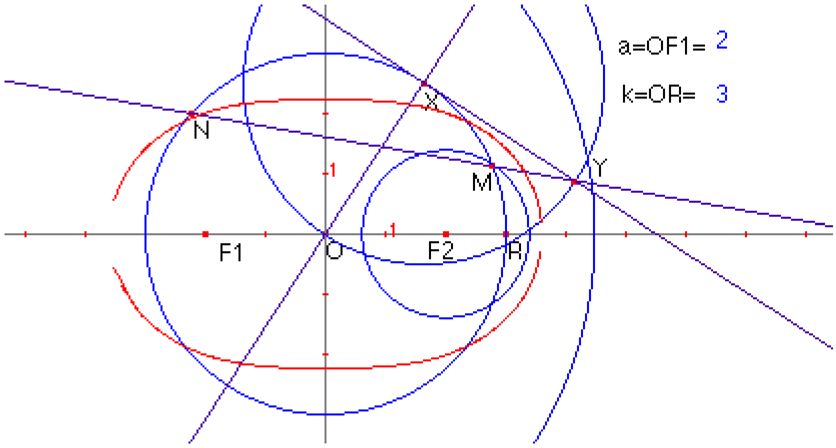
r) Feu la intersecció de les circumferència D_1, D_2. Anomeneu els punts P, P'.

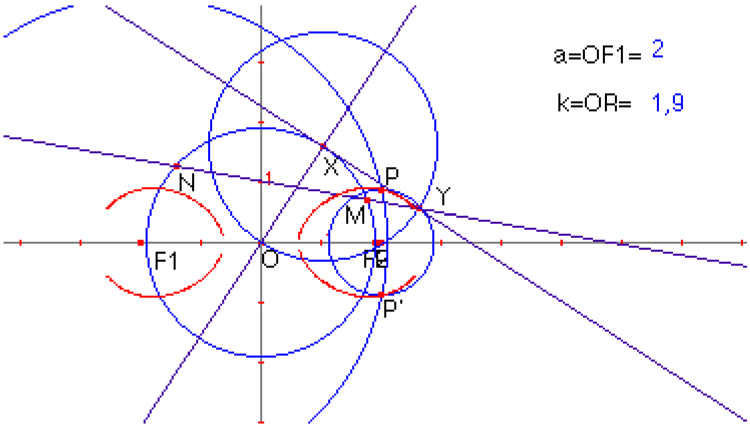
s) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P', respectivament, al variar el punt N sobre la circumferència C_1.

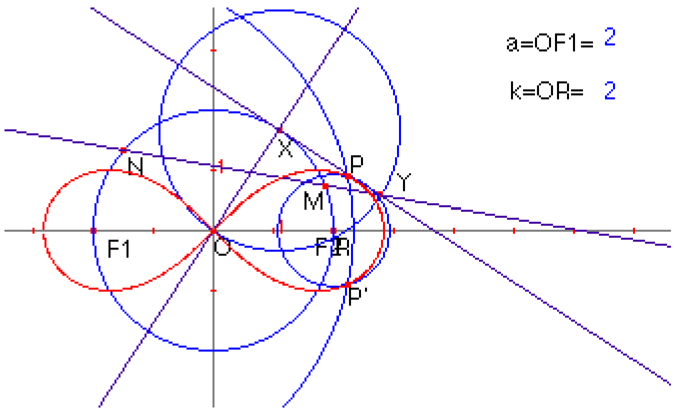
Depenent del valor de k ens donarà distintes corbes.



Exemple de corbes de Cassini:







- **LEMNISCATA DE GEROMO**

a) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$.

b) Dibuixeu el punt mig O del segment $\overline{AB}$.

c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.

d) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt A.

e) Dibuixeu un punt T sobre la recta r.

f) Dibuixeu la recta t que passa pels punts O, T.

g) Dibuixeu la recta m perpendicular a la recta r que passa pel punt T.

h) Feu la intersecció de la recta m i la circumferència C_1. Anomeneu els punts X, Y.

i) Dibuixeu la recta n perpendicular a la recta m que passa pel punt X.

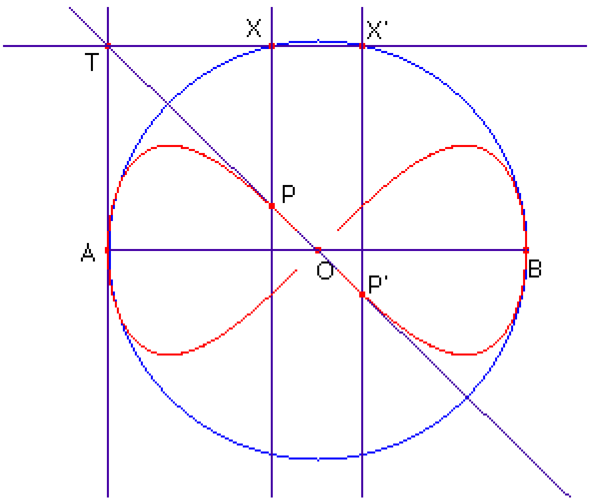
j) Feu la intersecció de les rectes n, t. Anomeneu el punt P.

k) Dibuixeu la recta n' perpendicular a la recta m que passa pel punt X'.

l) Feu la intersecció de les rectes n', t. Anomeneu el punt P'.

m) Dibuixeu el lloc geomètric dels punt P, P', respectivament, al variar T sobre la recta r.

Aquesta corba s'anomena *lemniscata de Geromo*.



- **EL FOLI**

a) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$.

b) Dibuixeu el punt mig O del segment $\overline{AB}$.

c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.

n) Dibuixeu un punt C sobre la circumferència C_1.

o) Dibuixeu la recta r que passa pels punts A, C.

p) Dibuixeu la recta m perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt C.

q) Feu la intersecció de la recta m i el segment $\overline{AB}$. Anomeneu el punt X.

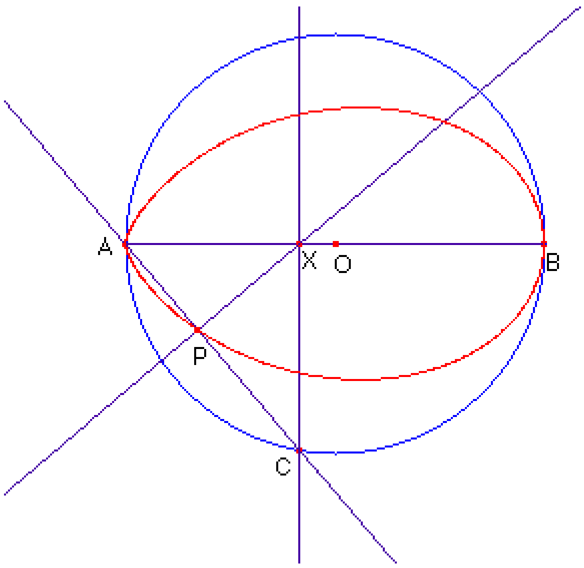
r) Dibuixeu la recta n perpendicular a la recta r que passa pel punt X.

s) Feu la intersecció de les rectes r, n. Anomeneu el punt P.

t) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar C sobre la circumferència C_1.

Aquesta corba s'anomena *foli*.

L'equació cartesiana del foli és: $\left(x^2+y^2\right)^2=4r^2x^2$ on $r=\frac{\overline{AB}}{2}$ A(0,0)



- **EL FOLI SIMÈTRIC**

a) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$.

b) Dibuixeu el punt mig O del segment $\overline{AB}$.

c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.

d) Dibuixeu un punt C sobre la circumferència C_1.

e) Dibuixeu la circumferència de centre C que passa pel punt B.

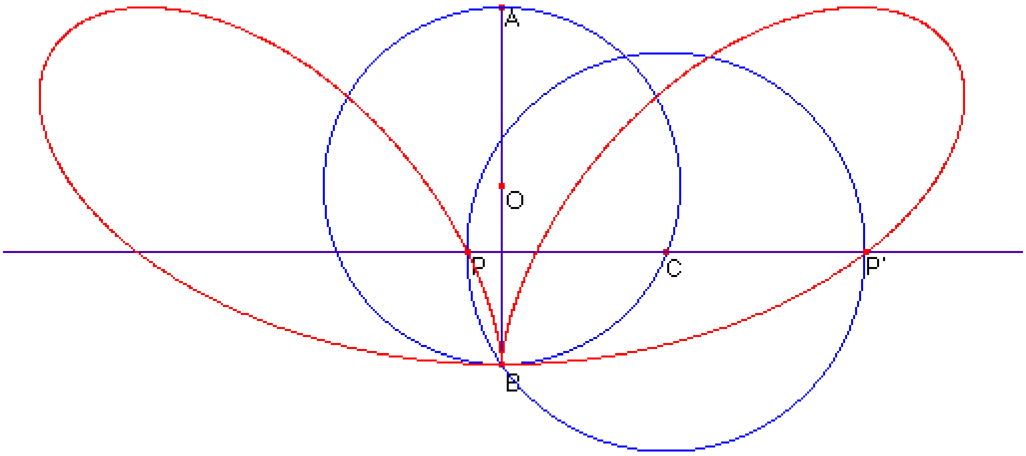
f) Dibuixeu la recta r perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt C.

g) Feu la intersecció de la circumferència C_2 i la recta r. Anomeneu els punts P, P'.

h) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P', respectivament, al variar C sobre la circumferència C_1.

Aquesta corba s'anomena *foli simètric*.

L'equació cartesiana del foli simètric és: $\left(x^2+y^2\right)^2+4rx^2y=0$ on $r=\overline{AB}$. B(0,0).



- **QUÀRTICA PIRIFORME**

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Definiu el valor r del radi (per exemple r=4).

c) Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt B.

d) Dibuixeu el punt simètric A del punt B respecte de l'origen O.

e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt B.

f) Dibuixeu un punt X sobre l'eix OX.

g) Dibuixeu la recta d perpendicular a l'eix OX que passa pel punt X. Recta directriu de la corba.

h) Dibuixeu un punt C sobre la recta d.

i) Dibuixeu la recta r que passa pels punts A, C.

j) Dibuixeu la recta s paral·lela a l'eix OX que passa pel punt C.

k) Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1. Anomeneu els punts D, E.

l) Dibuixeu la recta m perpendicular a l'eix OX que passa pel punt D.

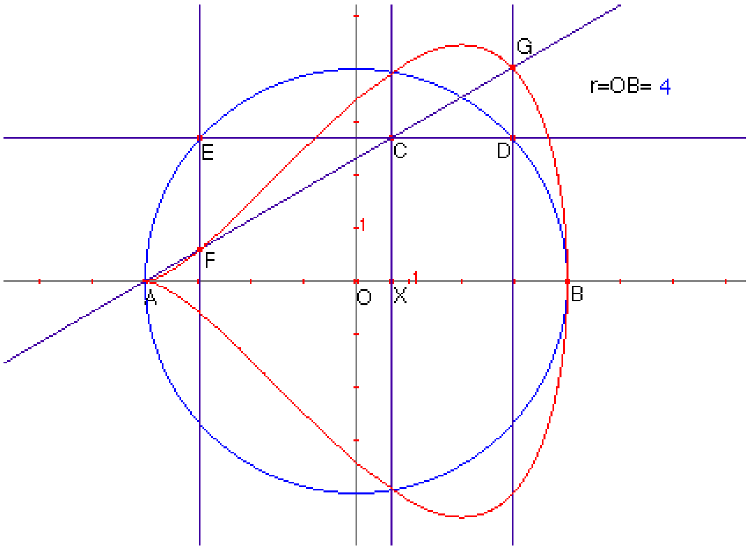
m) Feu la intersecció de les rectes m, r. Anomeneu el punt G.

n) Dibuixeu la recta n perpendicular a l'eix OX que passa pel punt E.

o) Feu la intersecció de les rectes n, r. Anomeneu el punt F.

p) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts E, F, respectivament, al variar C sobre la recta d.

Aquesta corba s'anomena *quàrtica piriforme*. L'equació cartesiana de la *quàrtica piriforme* és:
$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0$ on $a = \overline{OB}$, $b = d(O,X)$.



- **TRIFOLI SIMÈTRIC**

a) Construïu un sistema de coordenades ortogonals d'origen O.

b) Definiu el valor r del radi (per exemple r=4).

c) Transferiu el valor r a l'eix d'abscisses. Anomeneu el punt X.

d) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre X que passa per l'origen O.

e) Dibuixeu la recta r perpendicular a l'eix OX que passa pel punt O. Recta directriu.

f) Dibuixeu un punt M sobre la circumferència C_1.

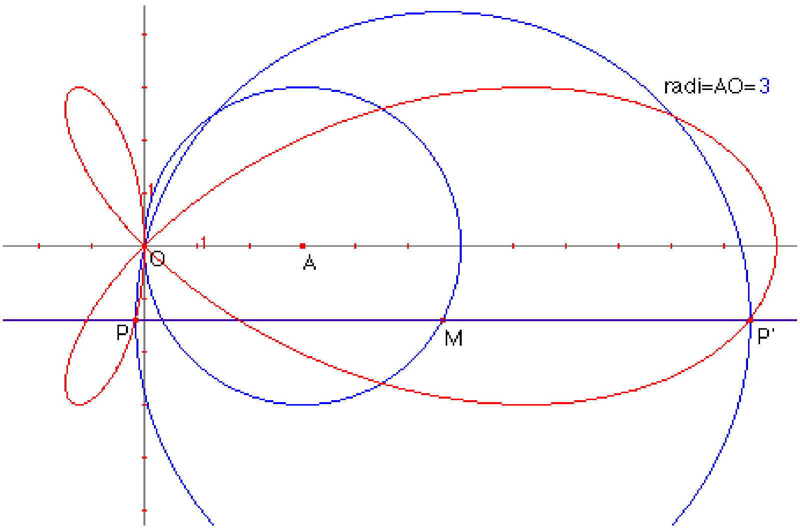
g) Dibuixeu la recta r paral·lela al l'eix OX que passa pel punt C.

h) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre M que passa pel punt O.

i) Feu la intersecció de la circumferència C_2 i la recta r. Anomeneu els punts P, P'.

j) Dibuixeu el lloc geomètric dels punts P, P' respectivament al variar M sobre la circumferència C_1.

Aquesta corba s'anomena *trifoli simèric*.



- **LA CICLOIDE**

La *cicloide* és la corba definida pel lloc geomètric de les posicions d'un punt fix d'una circumferència que roda sense relliscar sobre una recta. La recta s'anomena directriu i la circumferència s'anomena ruleta o generatriu.

Els passos de construcció són els següents:

a) Dibuixeu la semirecta d d'origen O (directriu).

b) Dibuixeu un punt M sobre la semirecta d.

c) Calculeu la distància $\overline{OM}$.

d) Dibuixeu la semirecta r d'origen A.

e) Dibuixeu un punt B sobre la semirecta r.

f) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$ (radi de la ruleta) i calculeu la seua mesura.

g) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre M i radi $\overline{AB}$.

h) Dibuixeu la recta m perpendicular al la semirecta d que passa pel punt M.

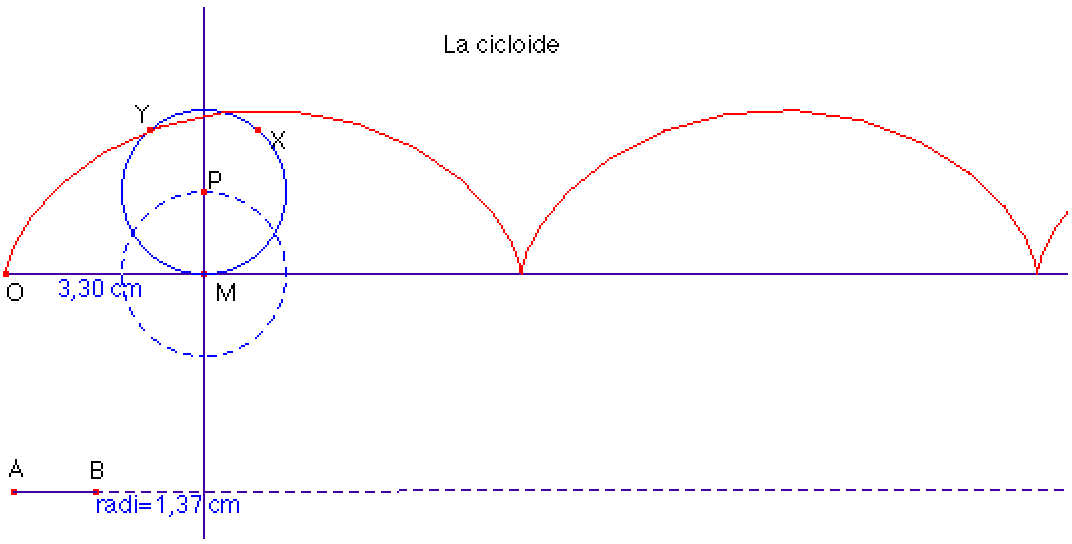
i) Feu la intersecció de la circumferència D_1 i la recta m. Anomeneu el punt P.

j) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre P i radi $\overline{AB}$ (ruleta).

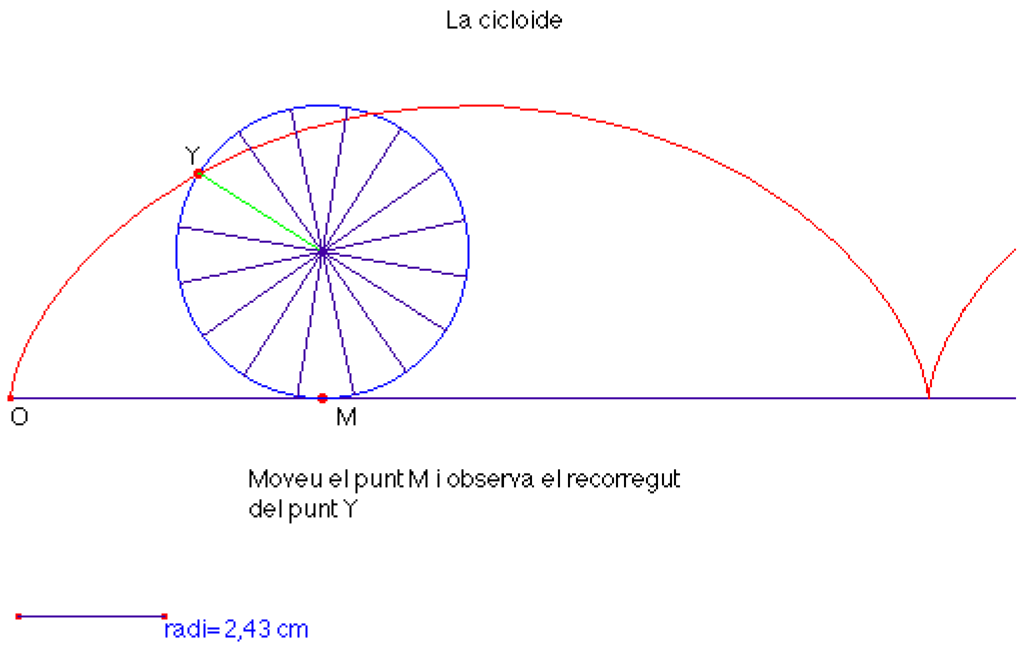
k) Transferiu a la circumferència C_1 des del punt M el valor $\overline{OM}$. Anomeneu el punt X.

l) Dibuixeu el punt Y simètric del punt X respecte de la recta m.

m) Feu el lloc geomètric del punt Y al variar M sobre la semirecta d.



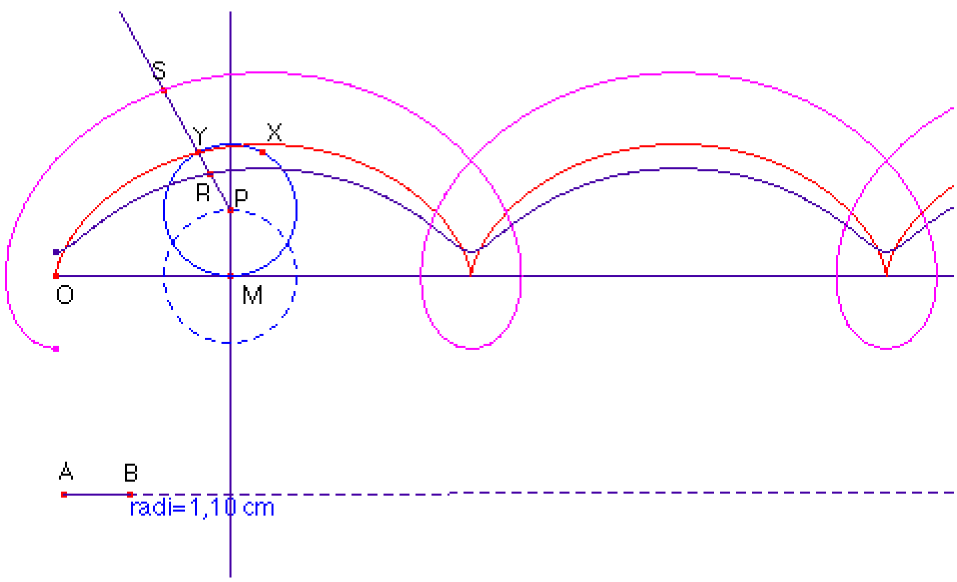
Ocultant els objectes i creant segments radis de la ruleta queda la següent figura:



Siga la semirecta d'origen P que passa pel punt Y.

Si considerem el punt R interior a la circumferència C_1. El lloc geomètric del punt R al variar M sobre la semirecta d s'anomena cicloide acurtada.

Si considerem el punt S exterior a la circumferència C_1. El lloc geomètric del punt S al variar M sobre la semirecta d s'anomena cicloide allargada.



- **L'EPICICLOIDE**

L'epicloide és la corba definida pel lloc geomètric de les posicions d'un punt fix d'una circumferència que roda exteriorment, sense relliscar, sobre una circumferència. La circumferència que roda s'anomena ruleta o generatriu i aquella sobre la qual roda s'anomena circumferència directriu. Els passos de construcció de la primera volta de l'epicicloide són els següents:

a) Dibuixeu la semirecta r d'origen A.

b) Dibuixeu un punt B sobre la semirecta r.

c) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$ (radi de la circumferència directriu).

d) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre O i radi $\overline{AB}$ (circumferència directriu).

e) Dibuixeu la semirecta r d'origen C.

f) Dibuixeu un punt D sobre la semirecta r.

g) Dibuixeu el segment $\overline{CD}$ (radi de la circumferència ruleta).

h) Dibuixeu els punts E, M sobre la circumferència D_1. Considerem el punt E, origen de l'epicicloide.

i) Dibuixeu la recta m que passa pels punts O, M.

j) Dibuixeu la circumferència E_1 de centre M i radi $\overline{CD}$.

k) Feu la intersecció de la circumferència E_1 i la recta m. Anomeneu el punt P.

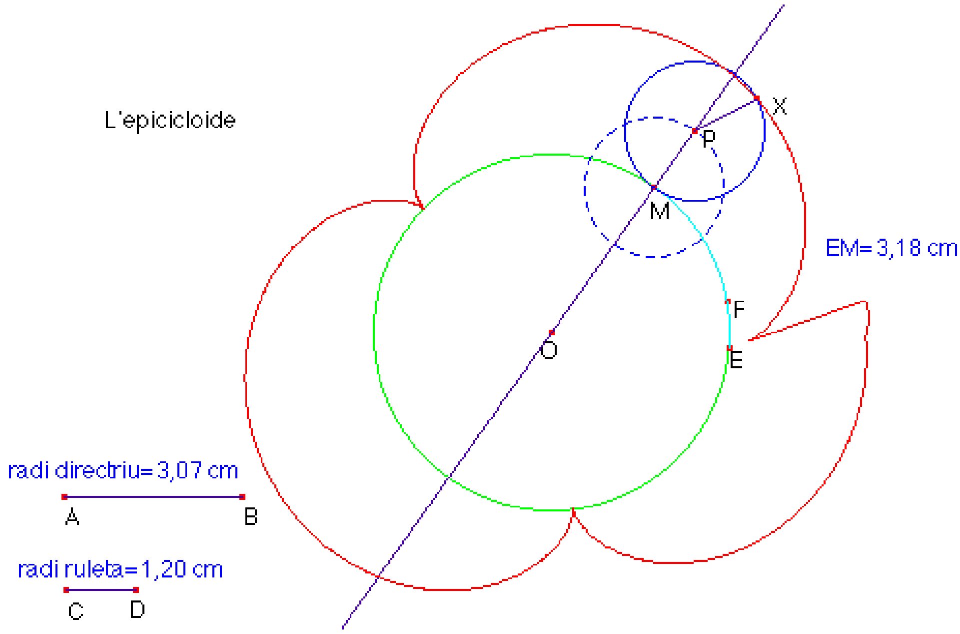
l) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre P i radi $\overline{CD}$ (ruleta).

m) Dibuixeu l'arc EFM de la circumferència D_1. Calculeu la seua mesura.

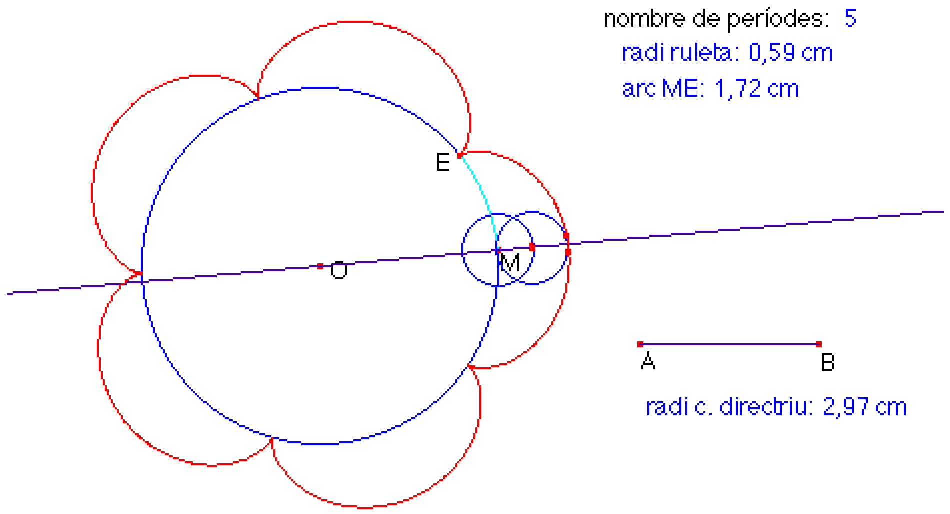
n) Transferiu a la circumferència C_1 des del punt M la mesura de l'arc EFM. Anomeneu el punt X.

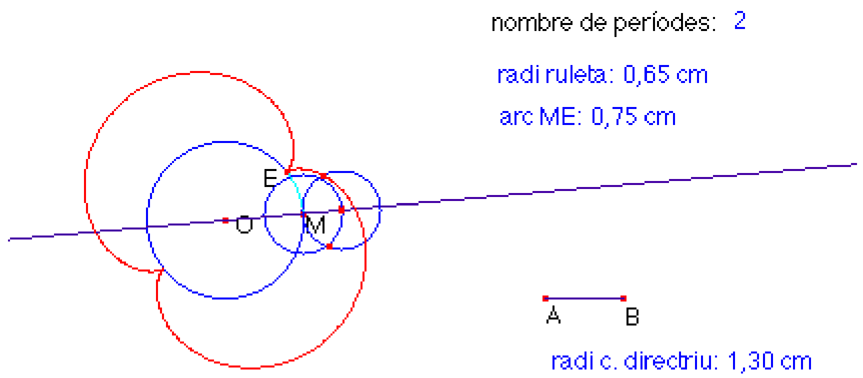
n) Dibuixeu el lloc geomètric del punt X al variar M sobre la circumferència D_1.

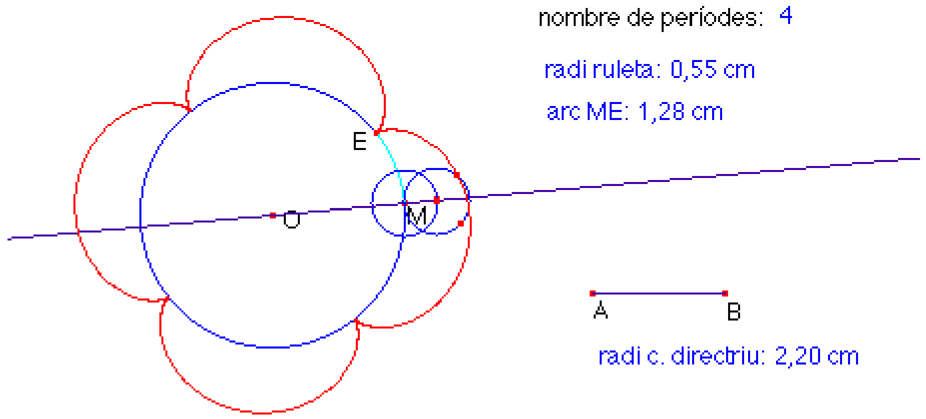
o) Noteu que heu dibuixat l'epicicloide de la primera volta de circumferència D_1.



Si la proporció entre el radi de la circumferència directriu i el radi de la ruleta és 1:n on n és un nombre natural major o igual que 2 l'epicicloide dibuixa n períodes complets sobre la circumferència directriu.







- **LES HIPOCICLOIDES**

La hipocicloide és la corba definida pel lloc geomètric de les posicions d'un punt fix d'una circumferència que roda interiorment, sense relliscar, sobre una circumferència. La circumferència que roda s'anomena ruleta o generatriu i aquella sobre la qual roda s'anomena circumferència directriu.

Construirem les hipocicloides coneguts el radi de la circumferència directriu i la proporció entre les circumferències generatriu i directriu.

a) Dibuixeu la semirecta r d'origen A.

b) Dibuixeu un punt B sobre la semirecta r.

c) Dibuixeu el segment $\overline{AB}$ (radi de la circumferència directriu). Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$.

d) Dibuixeu la circumferència D_1 de centre O i radi $\overline{AB}$ (circumferència directriu).

e) Definiu la proporció a entre les circumferències generatriu i directriu (per exemple a=4).

f) Calculeu $b = \frac{\overline{AB}}{a}$ radi de la ruleta.

g) Nota: Si l'anterior nombre és natural les corbes passen pel vèrtex del polígon regular de a costats inscrit a la circumferència directriu.

h) Dibuixeu els punts E, F, M sobre la circumferència D_1. Considerem el punt E, origen de la hipocicloide.

i) Dibuixeu la recta m que passa pels punts O, M.

j) Transferiu el valor b al punt M. Anomeneu el punt Q.

k) Dibuixeu la circumferència E_1 de centre M que passa pel punt Q.

l) Feu la intersecció de la circumferència E_1 i la recta m. Anomeneu el punt P.

m) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre P que passa pel punt M (ruleta).

n) Dibuixeu l'arc EFM de la circumferència D_1. Calculeu la seua mesura.

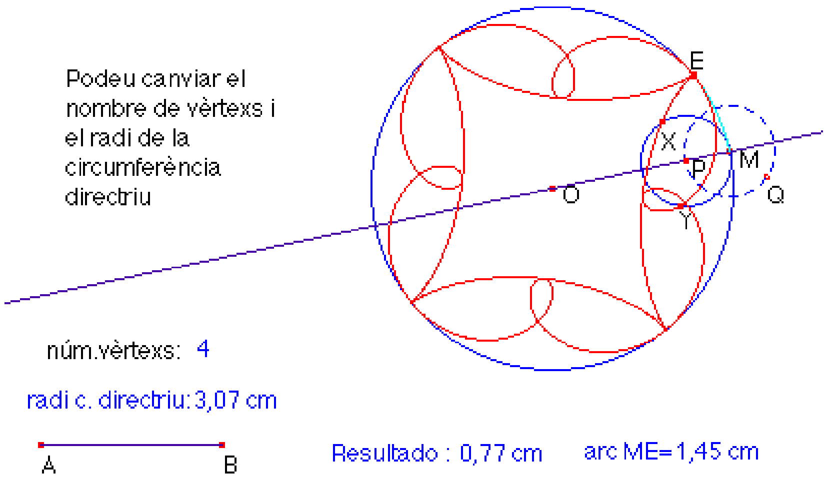
o) Transferiu a la circumferència C_1 des del punt M la mesura de l'arc EFM. Anomeneu el punt X.

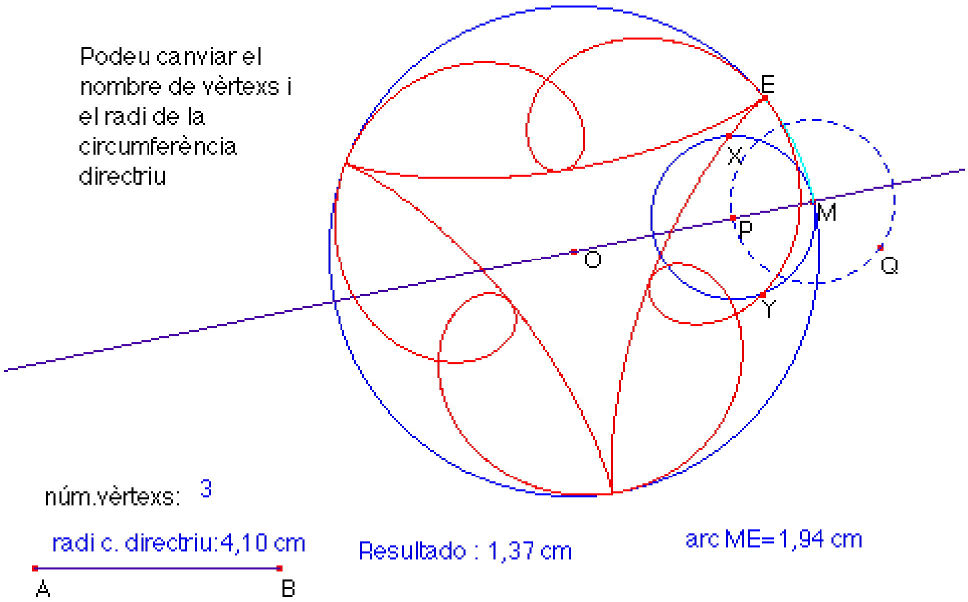
p) Dibuixeu el lloc geomètric del punt X al variar M sobre la circumferència D_1.

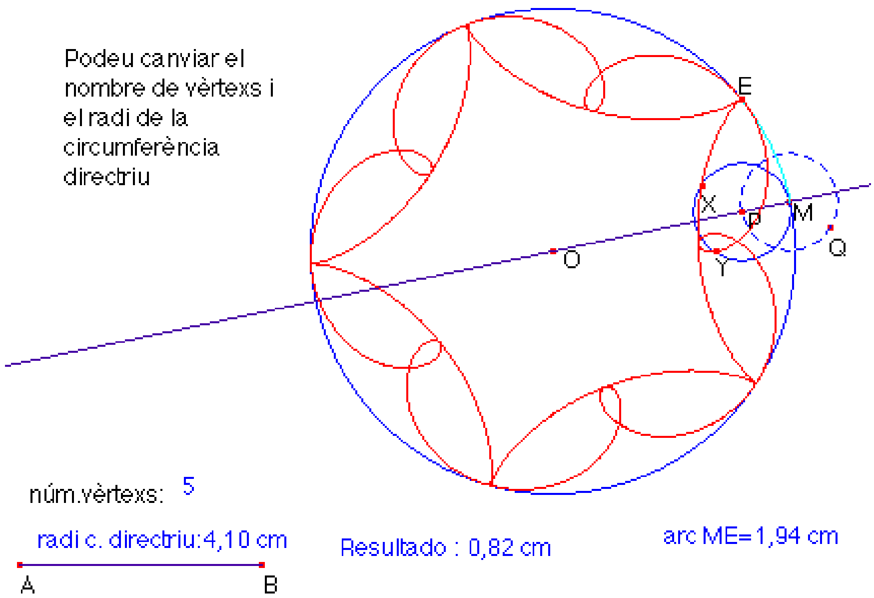
q) Noteu que heu dibuixat la hipocicloide de la primera volta de circumferència D_1.

r) Dibuixeu el punt simètric Y del punt X respecte de la recta m.

s) Dibuixeu el lloc geomètric del punt Y al variar M sobre la circumferència D_1.


Podeu canviar el
nombre de vèrtexs i
el radi de la
circumferència
directriu
E
X
P
M
Q
O
Y
núm.vèrtexs: 4
radi c. directriu:3,07 cm
A
B
Resultado : 0,77 cm
arc ME=1,45 cm


Podeu canviar el
nombre de vèrtexs i
el radi de la
circumferència
directriu
E
X
P
M
Q
O
Y
núm.vèrtexs: 3
radi c. directriu:4,10 cm
A
B
Resultado : 1,37 cm
arc ME=1,94 cm


Podeu canviar el
nombre de vèrtexs i
el radi de la
circumferència
directriu
E
X
P
M
Q
O
Y
núm.vèrtexs: 5
radi c. directriu:4,10 cm
A
B
Resultado : 0,82 cm
arc ME=1,94 cm

- **PODARIES**

S'anomena ***podaria*** d'una corba respecte d'un punt el lloc geomètric dels peus de les perpendiculars traçades pel punt donat a les tangents a la corba.

1.- Determineu la podaria d'una paràbola respecte del vèrtex.

2.- Determineu la podaria d'una paràbola respecte el punt intersecció del l'eix de simetria i de la directriu.

Dibuixeu una paràbola.

a) Dibuixeu la recta d (directriu).

a) Dibuixeu un punt F (focus) exterior a la recta d.

b) Dibuixeu un punt H sobre la recta d.

c) Dibuixeu la recta t perpendicular a la recta d que passa pel punt H.

d) Dibuixeu la recta r mediatriu al segment $\overline{FH}$.

e) Feu la intersecció de les rectes r, t. Anomeneu el punt X.

f) Comproveu que $d(X,F) = d(X,d) = d(X,H)$.

g) Dibuixeu el lloc geomètric del punt X al variar H sobre la recta d.

h) Dibuixeu 4 punt sobre el lloc geomètric i dibuixeu la paràbola.

Noteu que la recta r és tangent a la paràbola en el punt X.

i) Dibuixeu la recta m per perpendicular a la recta d que passa pel punt F.

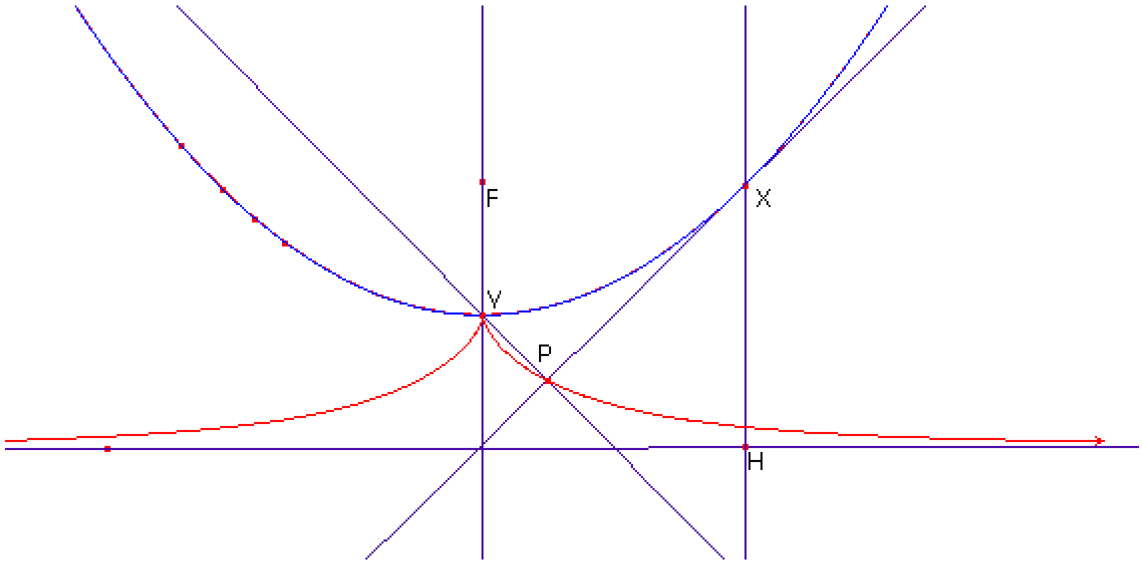
j) Feu la intersecció de la recta m, i la paràbola. Anomeneu el punt V vèrtex de la paràbola.

k) Dibuixeu la recta n perpendicular a la recta r que passa pel punt V.

l) Feu la intersecció de les rectes n, r. Anomeneu el punt P.

m) Feu el lloc geomètric del punt P al varia H sobre la recta d.

n) Noteu que el lloc geomètric és la *cissoide de Diocles*.



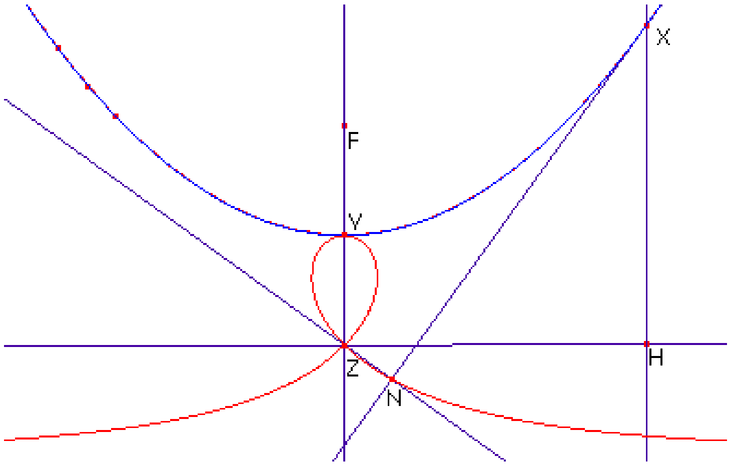
o) Feu la intersecció de les rectes d, m. Anomeneu el punt Z.

p) Dibuixeu la recta v perpendicular a la recta r que passa pel punt Z.

q) Feu la intersecció de les rectes v, r. Anomeneu el punt Q.

r) Dibuixeu el lloc geomètric del punt Q al variar H sobre la directriu.

s) Noteu que el lloc geomètric és l'*esferoide*.



3.- Determineu la podaria d'una circumferència respecte d'un punt de la circumferència.

a) Dibuixeu una circumferència C_1 de centre O.

b) Dibuixeu un punt M sobre la circumferència C_1.

c) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, M.

d) Dibuixeu la recta s perpendicular a la recta r que passa pel punt M. Recta tangent a la circumferència que passa pel punt M.

e) Dibuixeu un punt A de la circumferència.

f) Dibuixeu la recta t perpendicular a la recta s que passa pel punt A.

g) Feu la intersecció de les rectes s, t. Anomeneu el punt P.

h) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar M sobre la circumferència.

i) Noteu que el lloc geomètric és la *limaçon de Pascal*.