ESTUDI I MANEIG DE LES

ESTRUCTURES ESPACIALS, LES FORMES I L’ART EN GEOMETRÍA

SESSIÓ 3

POLIEDRES II

MAURICI CONTRERAS / RICARD PEIRÓ

POLIEDRES II

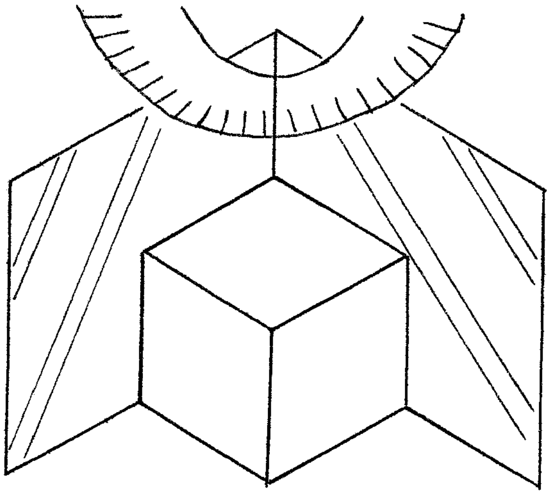
Introducció

Els poliedres estan presents en nombroses estructures espacials de la vida quotidiana i en moltes obres d'art. En esta sessió ens centrarem en l'estudi d'algunes propietats dels poliedres, tant regulars com irregulars. Citarem entre les dites propietats el càlcul d'angles diedres, l'existència de distints tipus de simetria i la dualitat entre poliedres. Inclourem també l'estudi d'algunes relacions mètriques i l'ús d'alguns programes d'ordinador que permeten observar propietats de poliedres.

1. Angles diedres

- **ANGLES DIEDRES I**

Presa un cub i col·loca el llibre d'espills de manera que dos cares adjacents del cub coincidisquen amb els fulls del llibre. L'angle que formen entre si els fulls del llibre d'espills és el que formen les dos cares adjacents del cub i s'anomena ANGLE DIEDRE. Per a mesurar este angle, basta que col·loques el transportador d'angles com s'indica en la següent figura. Comprova que el seu valor és de 90°.



Quins seran els angles diedres en els altres poliedres regulars?

Utilitza el llibre d'espills i el transportador d'angles per a completar la taula següent:

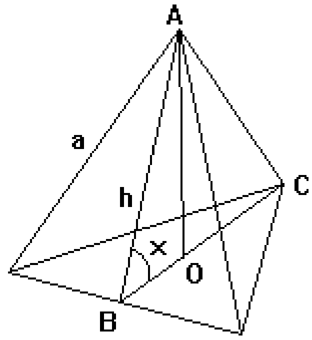
POLIEDRE	ANGLE DIEDRE
CUB	90°
TETRAEDRE	
OCTAEDRE	
ICOSAEDRE	
DODECÀEDRE	

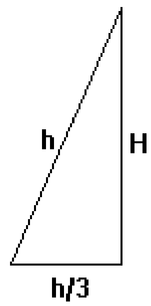
Quants angles diedres distints té el deltaedre–6? Mesura'ls usant el llibre d'espills i el transportador d'angles.

- **ANGLES DIEDRES II**

Per a obtindre l'angle diedre d'un tetraedre regular, a més de ferramentes com el llibre d'espills i el transportador d'angles, pots usar tècniques trigonomètriques.

En efecte, la mesura de l'angle diedre és la del seu rectilini ABC, és a dir la mesura de l'angle que formen les altures de dos cares adjacents. Per a determinar tal angle, tindrem en compte la mesura de l'altura de les dos cares del diedre del tetraedre i el fet que el centre O de la cara dista de B un terç de BC, és a dir, BO=h/3:





Es complix que $\cos x = \frac{BO}{BA} = \frac{h/3}{h} = \frac{1}{3}$. Per tant, $x = \cos^{-1}(1/3) = 70{,}52877937° \approx 70°32'$

De forma semblant es poden obtindre els angles diedres dels altres poliedres.

Utilitza tècniques trigonomètriques per a trobar els angles diedres dels poliedres següents: octaedre, tetraedre truncat, cub truncat, octaedre truncat.

- **ANGLES DIEDRES D'ALGUNS POLIEDRES**

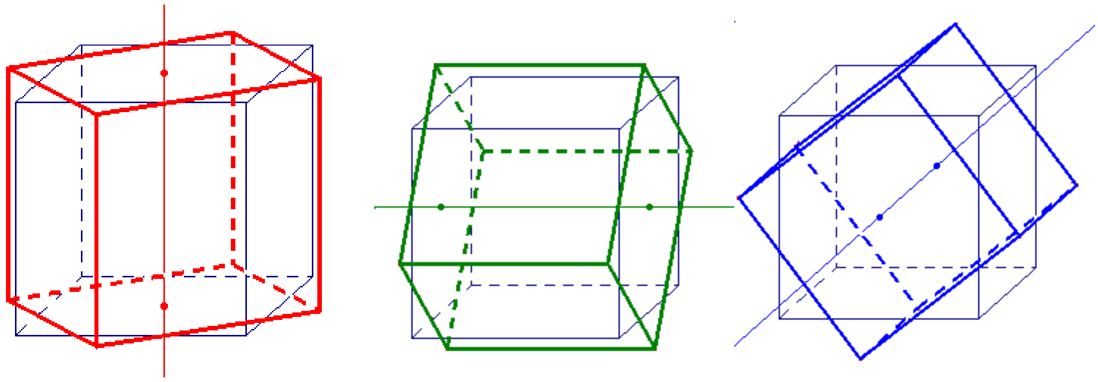
POLIEDRES	ANGLES DIEDRES
CUB	90°
TETRAEDRE	$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70°\ 31'\ 43.61'' \approx 70°\ 32'$
OCTAEDRE	$\arccos\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109°\ 28'\ 16.39'' \approx 109°\ 28'$
DODECÀEDRE	$\arccos\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \approx 116°\ 33'\ 54.1'' \approx 116°\ 34'$
ICOSAEDRE	$\arccos\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right) \approx 138°\ 11'\ 22.8'' \approx 138°\ 11'$
TETRAEDRE TRUNCAT	70° 32' (6–6) + 109° 28' (6–3)
CUB TRUNCAT	90° (8–8) + 125° 16' (6–3)
OCTAEDRE TRUNCAT	109° 28' (6–6) + 125° 16' (6–4)
DODECÀEDRE TRUNCAT	116° 34' (10–10) + 142° 37' (10–3)
ICOSAEDRE TRUNCAT	138° 11' (6–6) + 142° 37' (6–5)

2. Simetries dels poliedres

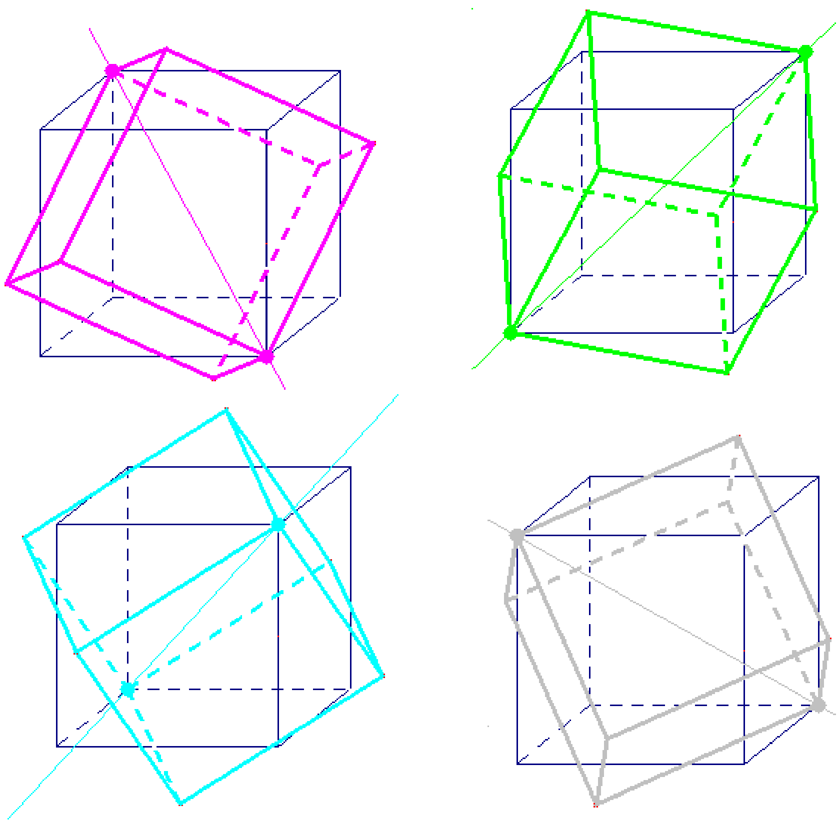
- **SIMETRIES DEL CUB**

Eix de simetria o de rotació és la recta que travessa el políedre i que, si el políedre gira al voltant d'ella, torna a coincidir el políedre abans de donar una volta completa. L'ordre és el nombre de vegades que coincideix el políedre fins a donar una volta completa.

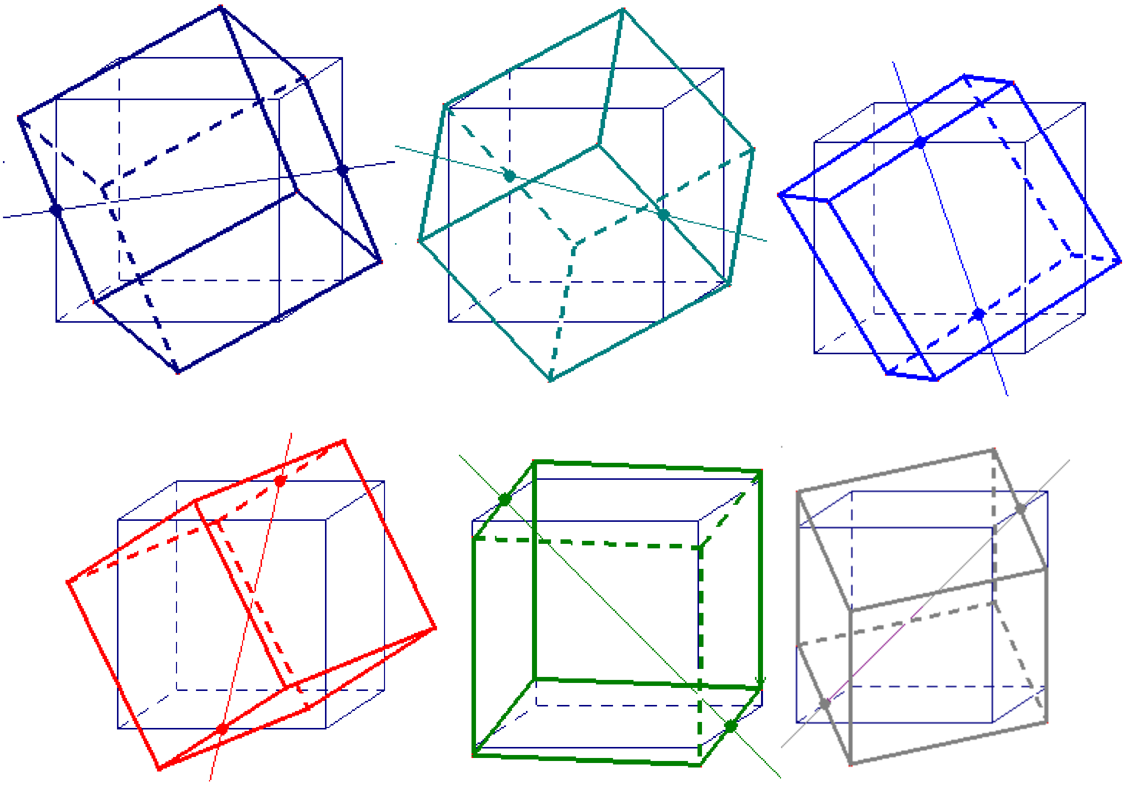
3 Eixos de simetria d'ordre 4



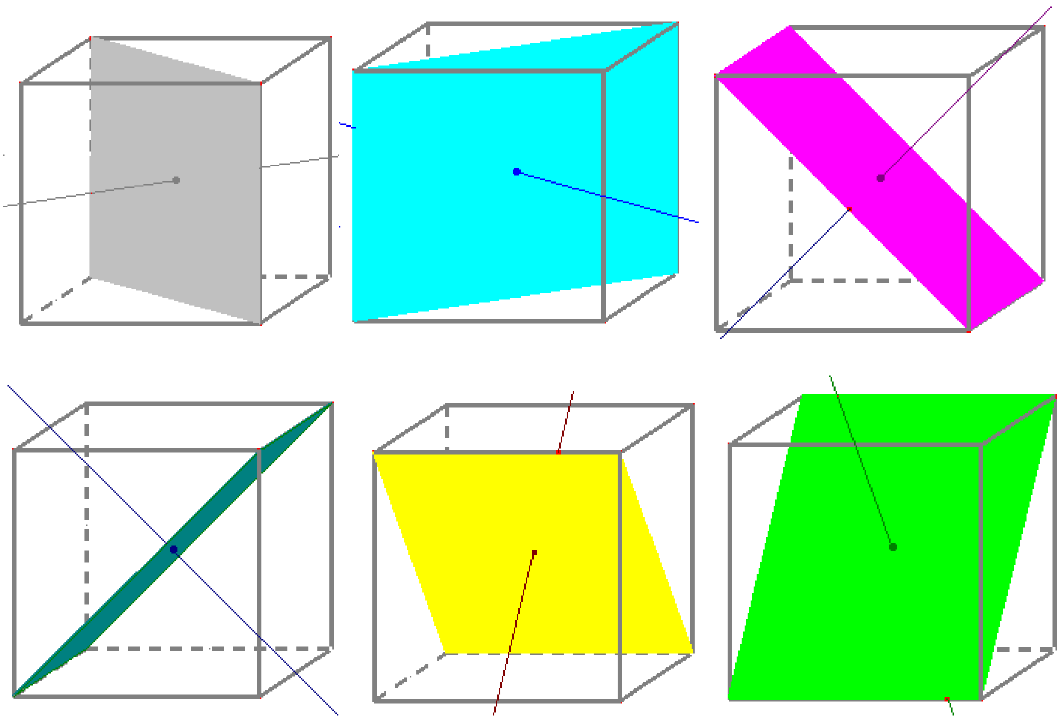
4 Eixos de simetria d'ordre 3



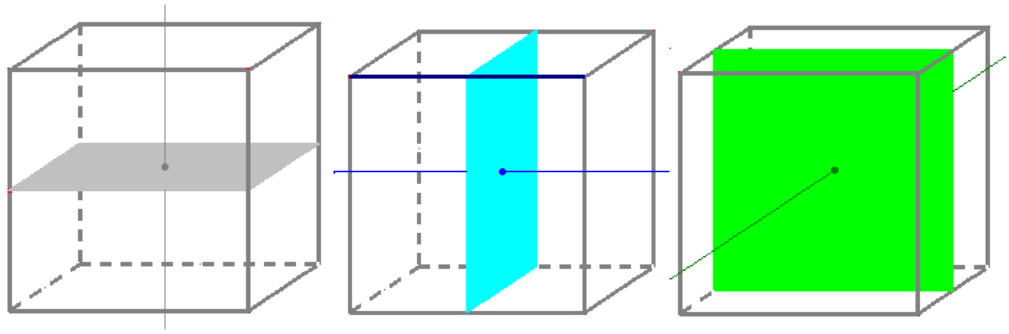
6 Eixos de simetria d'ordre 2



6 Plànols de simetria perpendiculars als eixos d'ordre 2 que passen pel centre del políedre.

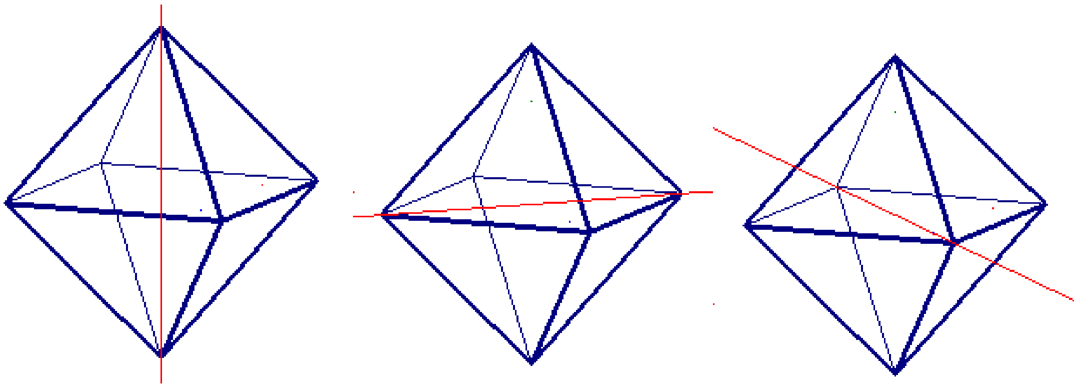


3 Plànols de simetria perpendiculars als eixos d'ordre 4 que passen pel centre del políedre.

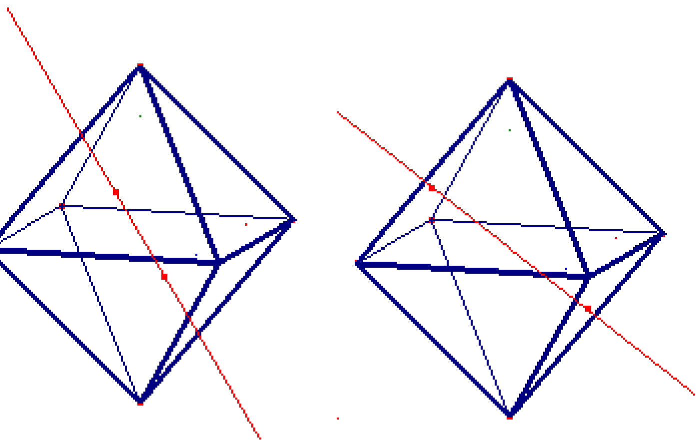


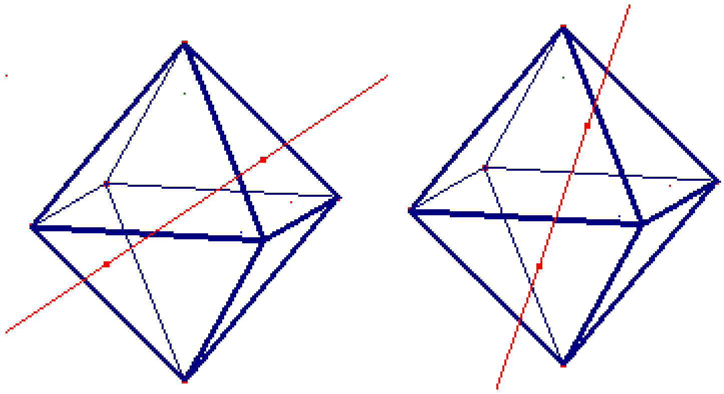
- **SIMETRIES DE L'OCTÀEDRE**

3 Eixos de simetria d'ordre 4
recta que passa pels vèrtexs opostats

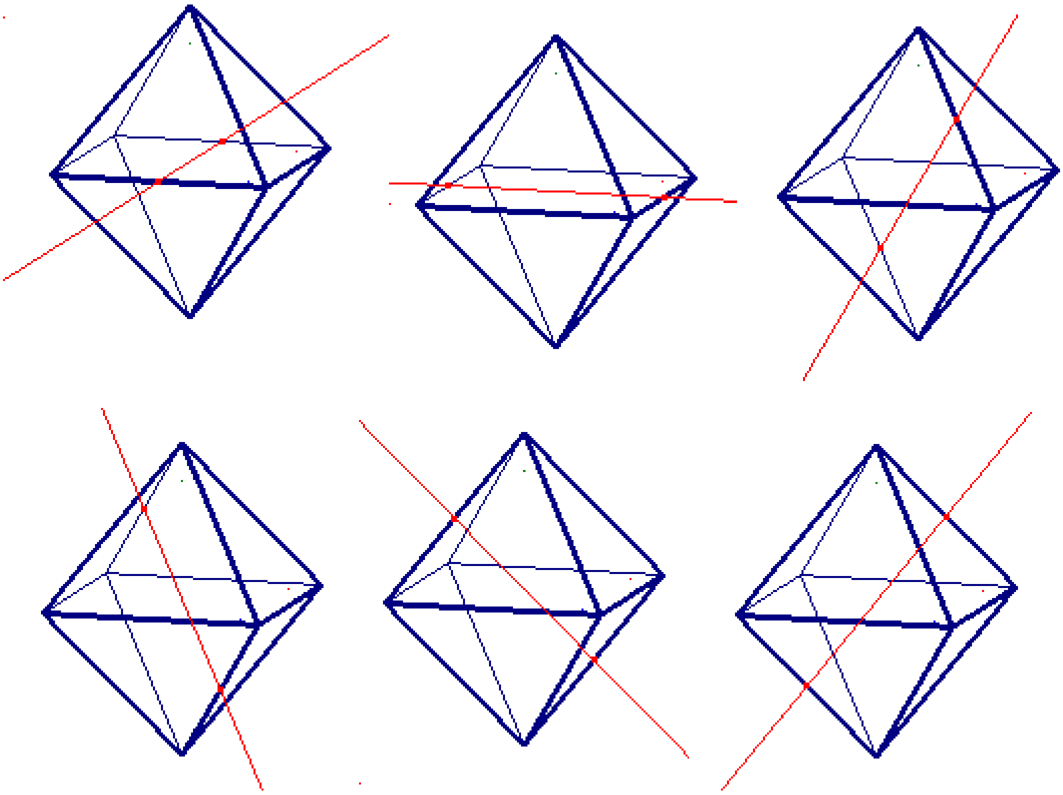


4 Eixos de simetria d'ordre 3
Recta que passa pel centre de les cares oposades

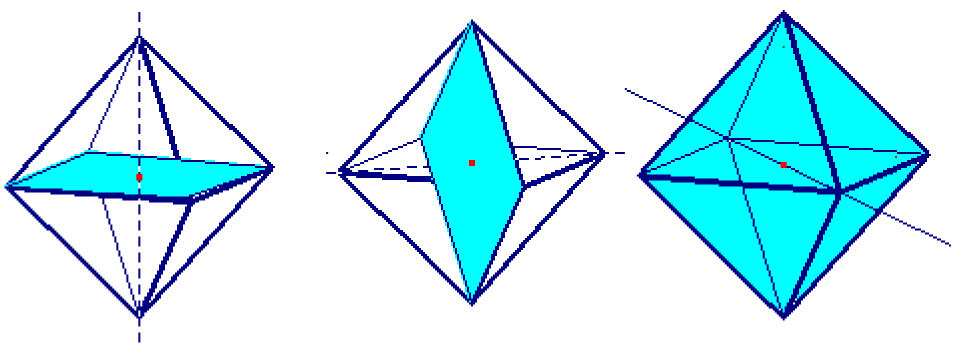




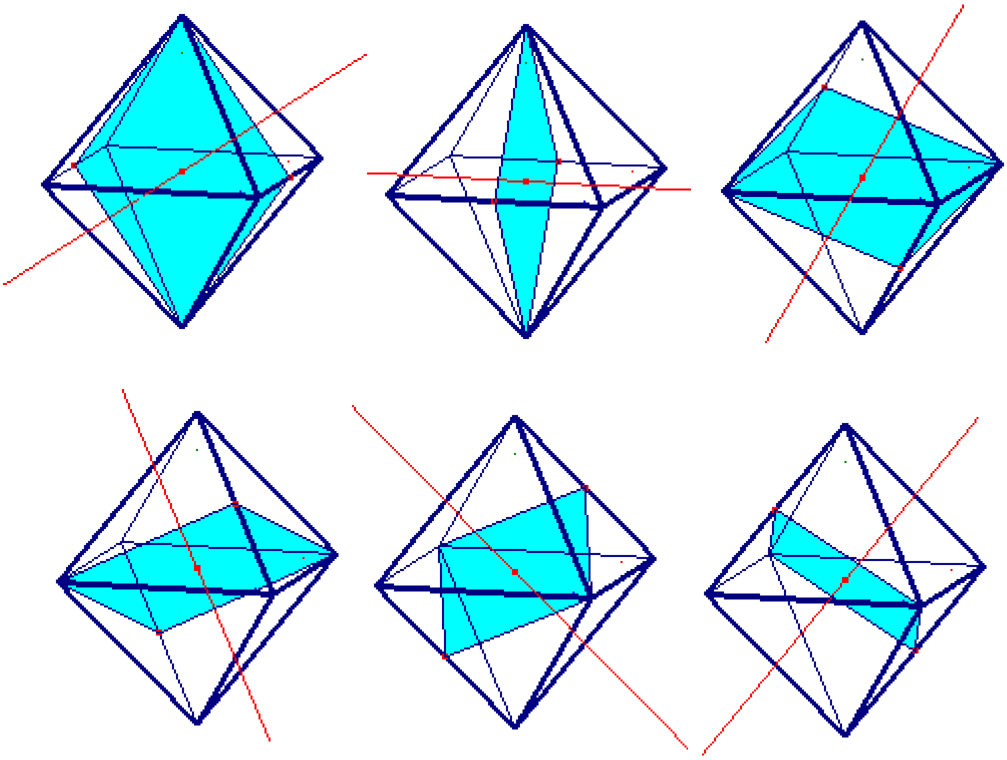
6 Eixos de simetria d’ordre 2
recta que passa pel centre de les arestes oposades



3 Plànols de simetria perpendiculars als eixos d’ordre 4 que passen pel centre del políedre



6 Plànols de simetria perpendiculars als eixos d'ordre 2 que passen pel centre del políedre.



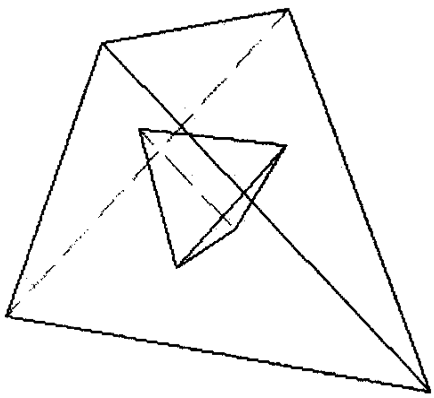
3. Políedres duals

- **DUALITAT DE POLÍEDRES**

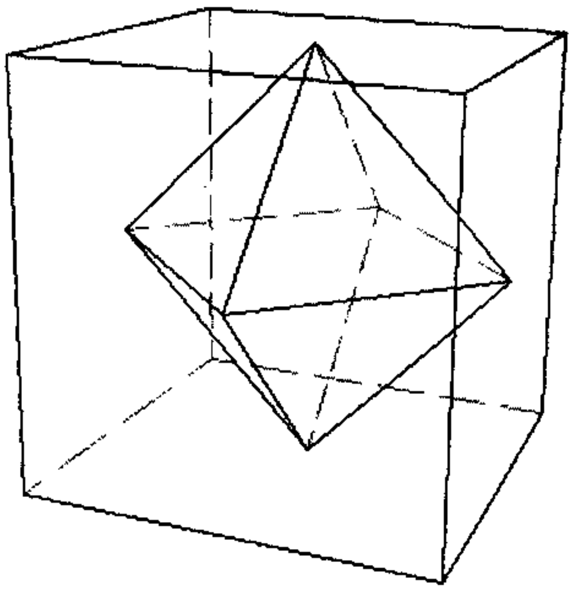
Si en un políedre unim entre si els centres de les cares, obtenim un altre políedre el nombre de cares del qual coincideix amb el nombre de vèrtexs del primer i viceversa. A aquests políedres s'anomenen duals.

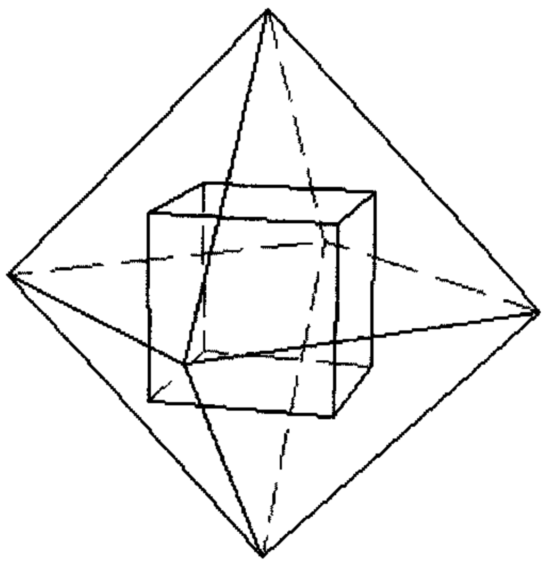
- **POLÍEDRES DUALS DELS SÒLIDS PLATÒNICS.**

Tetràedre-Tetràedre

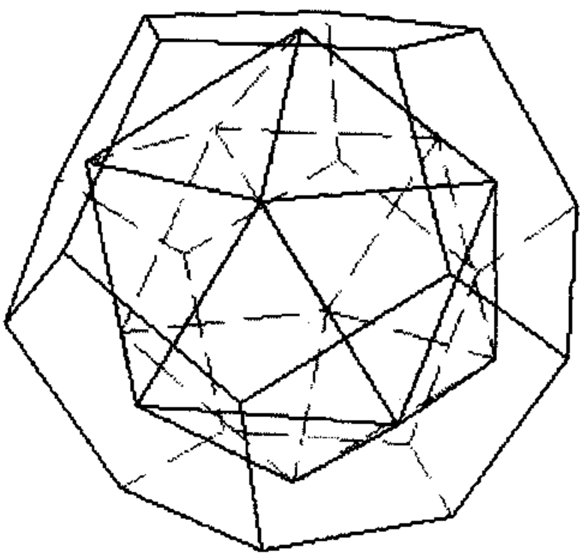


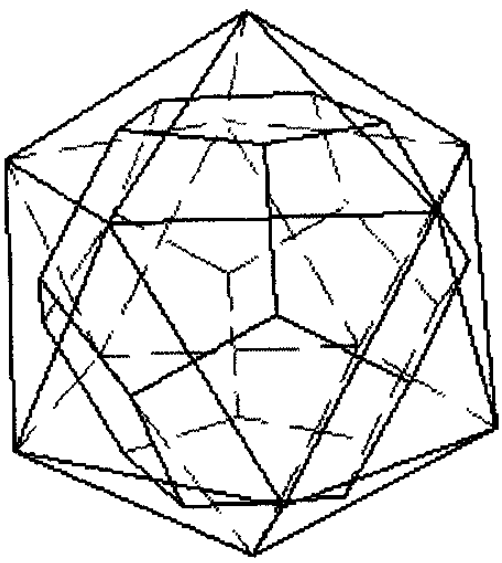
Cub-Octàedre





Dodecàedre-Icosàedre.

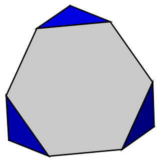
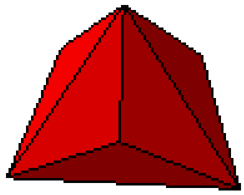
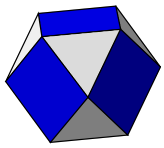
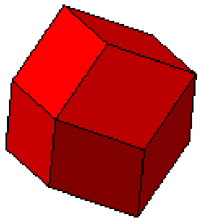
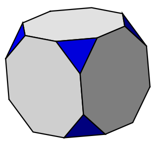
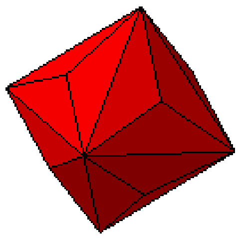
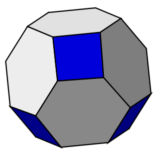
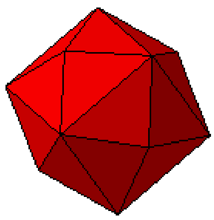
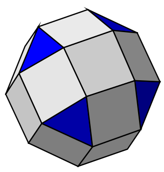
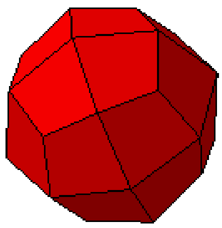


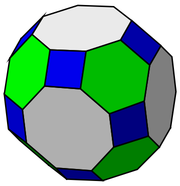
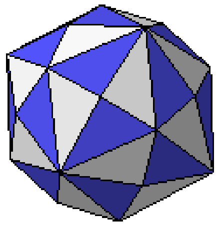
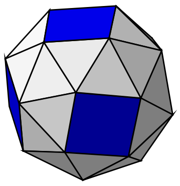
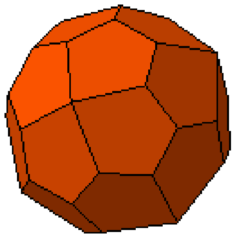
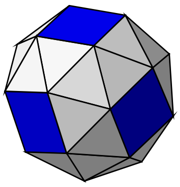
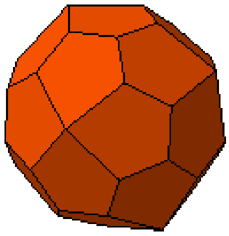
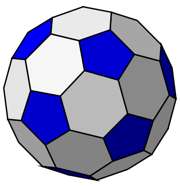
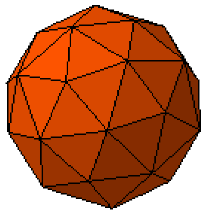
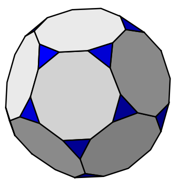
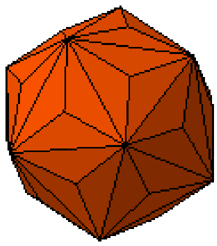


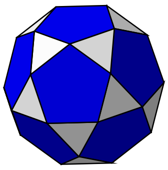
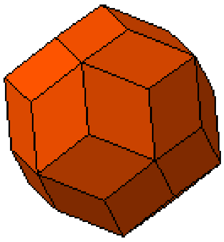
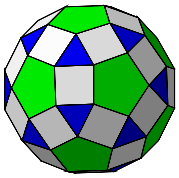
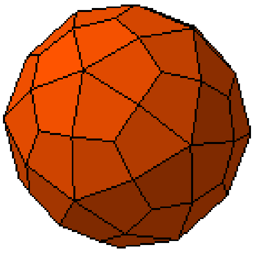
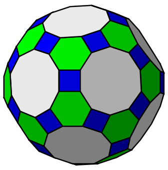
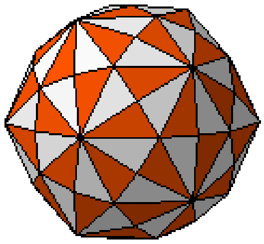
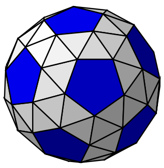
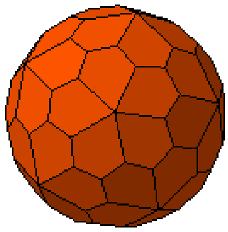
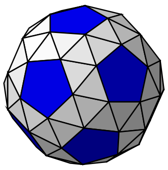
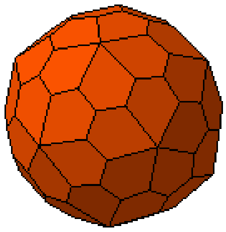
- **POLÍEDRES DUALS DELS ARQUIMEDIANS.**

Els políedres duals dels políedres arquimedians són els sòlids o políedres de Catalan.

Políedres arquimedians i els duals de Catalan:

	Políedres Arquimedians	Políedres de Catalan	
Tetràedre truncat			Tetràedre Triakis
Cubooctàedre			Dodecàedre ròmbic
Cub truncat			Octàedre Triakis
Octàedre truncat			Cub Hexakis
Rombicuboctàedre			Icositetràedre trapezoidal

Gran rombicuboctàedre			Dodecàedre pentakis
Cub Simus			Icositetràedre pentagonal
Cub Simus*			Icositetràedre pentagonal*
Icosàedre truncat			Dodecàedre pentakis
Dodecàedre truncat			Icosàedre triakis

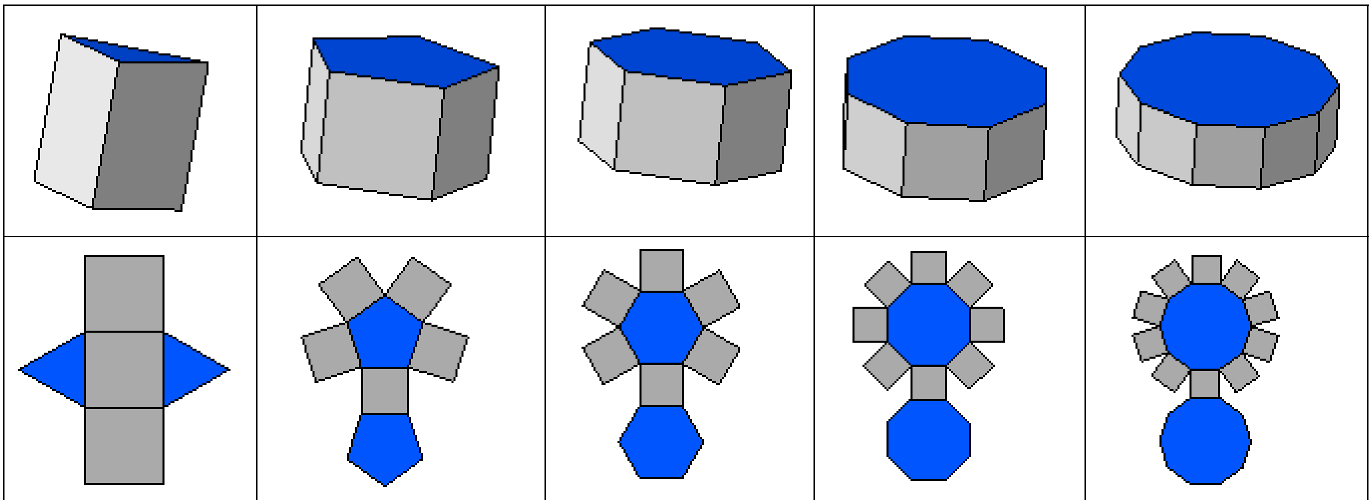
Icosidodecàedre			Triacontàedre ròmbic
Rombicosidodecàedre			Hexacontàedre trapezoïdal
Gran rombicosidodecàedre			Icosàedre hexakis
Dodecàedre simus			Hexacontàedre pentagonal
Dodecàedre simus*			Hexacontàedre pentagonal*

- **PRISMES I ANTIPRISMES.**

Els prismes són políedres formats per dues cares poligonals iguals (anomenades bases), paral·leles i disposades en la mateixa orientació (costas homòlegs paral·lels), de forma que al unir els vèrtexs homòlegs d'ambdues cares resulten rectangles o paral·lelograms. En aquest estudi només considerarem les que formen cares laterals quadrats i bases polígons regulars.

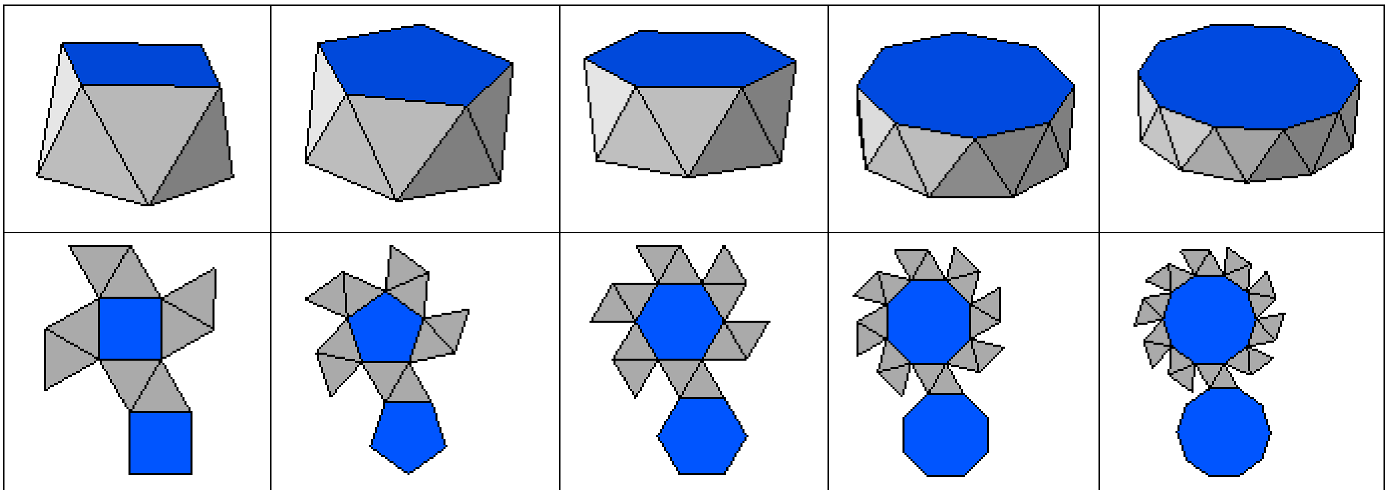
Els antiprismes són políedres formats per dues cares poligonals iguals i disposades lleugerament girades una respecte de l'altra (costats homòlegs no paral·lels), unint cada vèrtex amb l'altre no homòleg més pròxim s'obtenen cares laterals triangulars iguals alternades en orientacions. En aquest estudi només considerarem les cares laterals formades per triangles equilàters i bases polígons regulars.

Exemples de prismes i els seus desenvolupaments:



Prisma triangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal	Prisma octogonal	Prisma decagonal

Exemples d'antiprismes i els seus desenvolupaments:

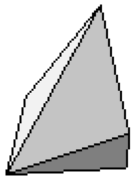
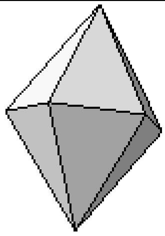
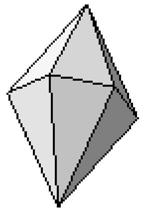
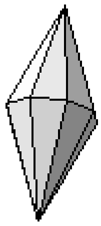
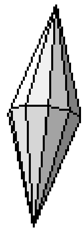
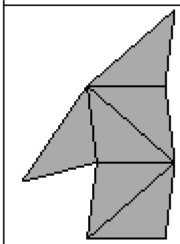
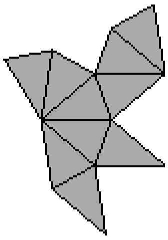
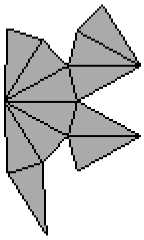
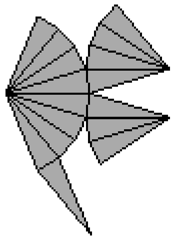
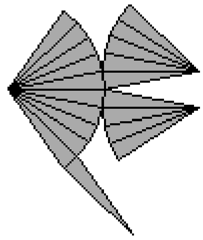


Antiprisma quadrangular	Prisma pentagonal	Antiprisma hexagonal	Antiprisma octogonal	Antiprisma decagonal

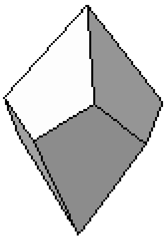
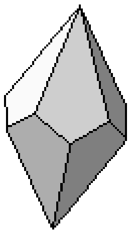
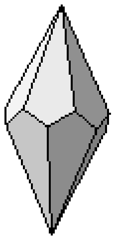
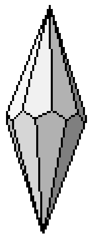
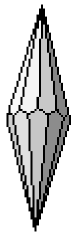
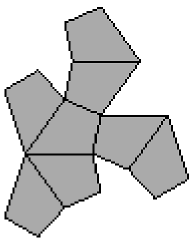
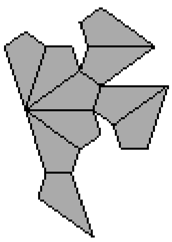
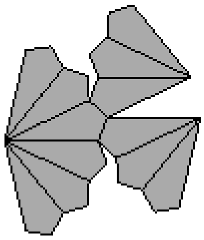
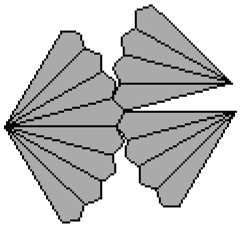
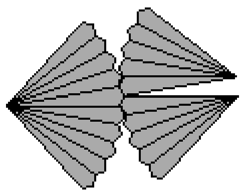
- **POLÍEDRES DUALS DELS PRISMES I ANTIPRISMES: DIPIRÀMIDES I DELTÀEDRES**

Les dipiràmides són els políedres duals dels prismes. Els deltàedres són els políedres duals dels antiprismes.

Exemples de dipiràmides (duals dels prismes) i els seus desenvolupaments:

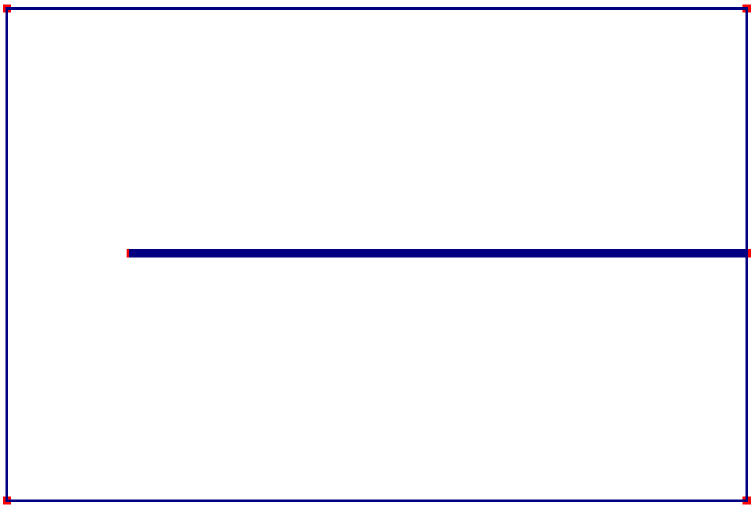
				
				
Dipiràmide triangular	Dipiràmide pentagonal	Dipiràmide hexagonal	Dipiràmide octogonal	Dipiràmide decagonal

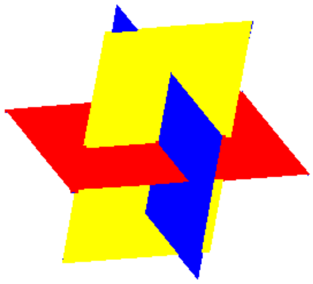
Exemples de deltàedres (duals dels antipismes) i els seus desenvolupaments:

				
				
Deltàedres quadrangular	Deltàedres pentagonal	Deltàedres hexagonal	Deltàedres octogonal	Deltàedres decagonal

4. Icosaedre a l'aire

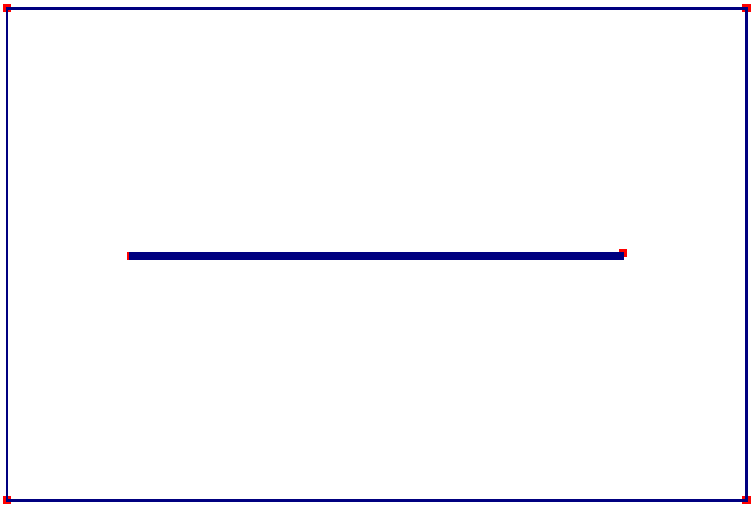
3 rectangles auris per a la construcció d'un icosàedre a l'aire
Talleu per la línia més grossa i munteu.

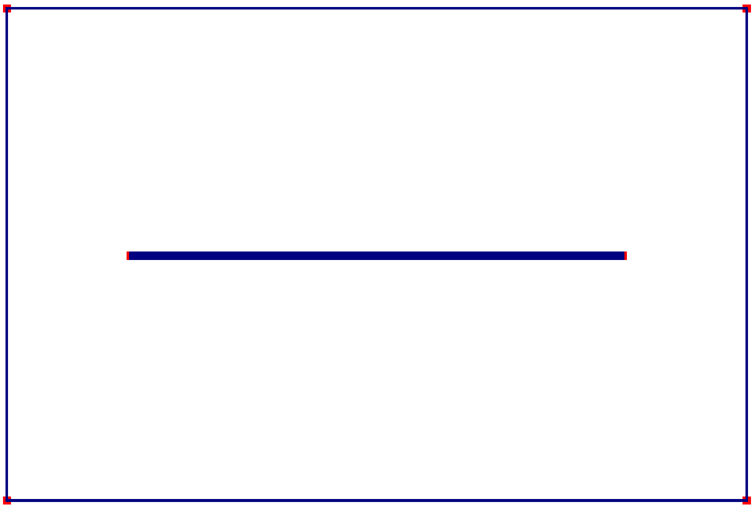




Per a construir el icosàedre a l'aire calen 6 barres de ferro que determinen les diagonals de l'icosàedre.

Les barres són de la mida dels costats més llargs del rectangle auri
Dos a dos formen un rectangle auri.
De cada extrem ixen 5 cables de la longitud de l'aresta de l'icosàedre.
Tensant els cables es forma l'icosàedre.

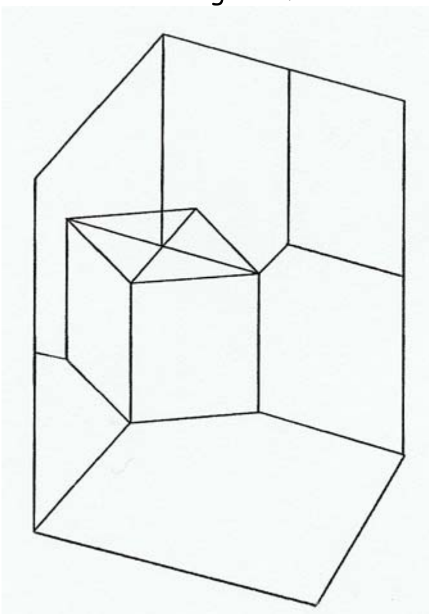




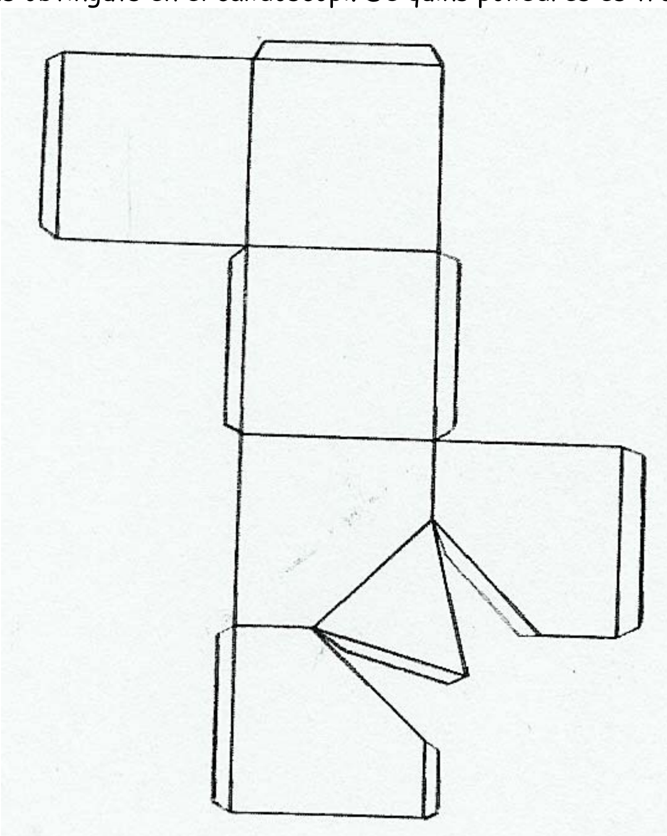
5. Calidoscopis polièdrics

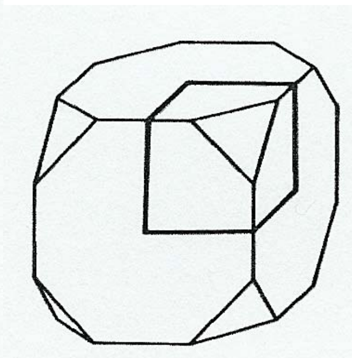
- ***CALIDOSCOPI OCTAÈDRIC***

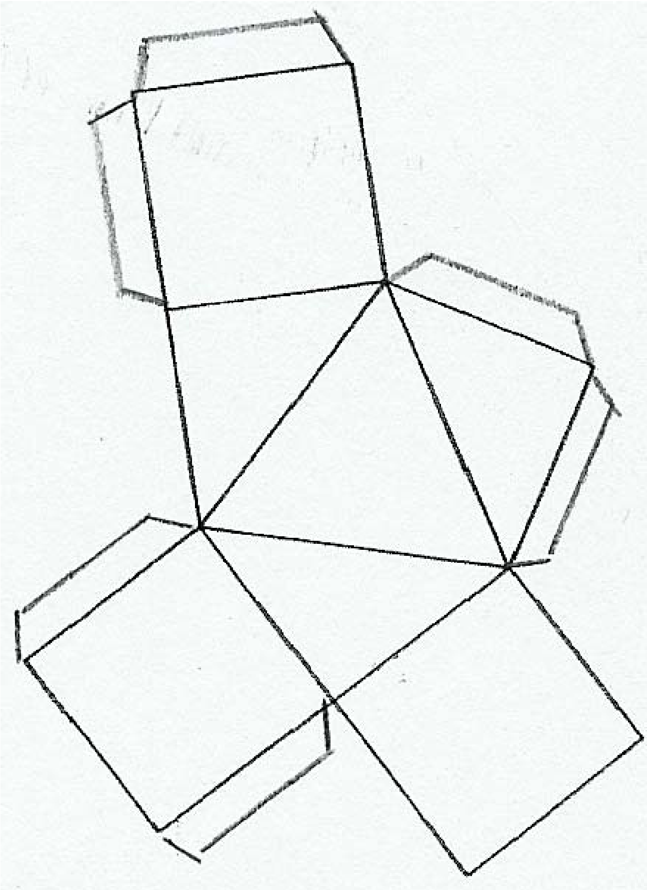
El calidoscopi octaèdric o tredre d'espills està format per tres espills amb forma de triangles rectangles, units per les arestes, de manera que els tres espills són perpendiculars entre si dos a dos. Col·locant en el calidoscopi diversos mòduls, es generen amb les imatges diferents sòlids.

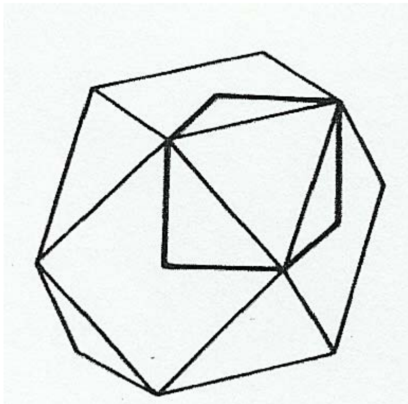


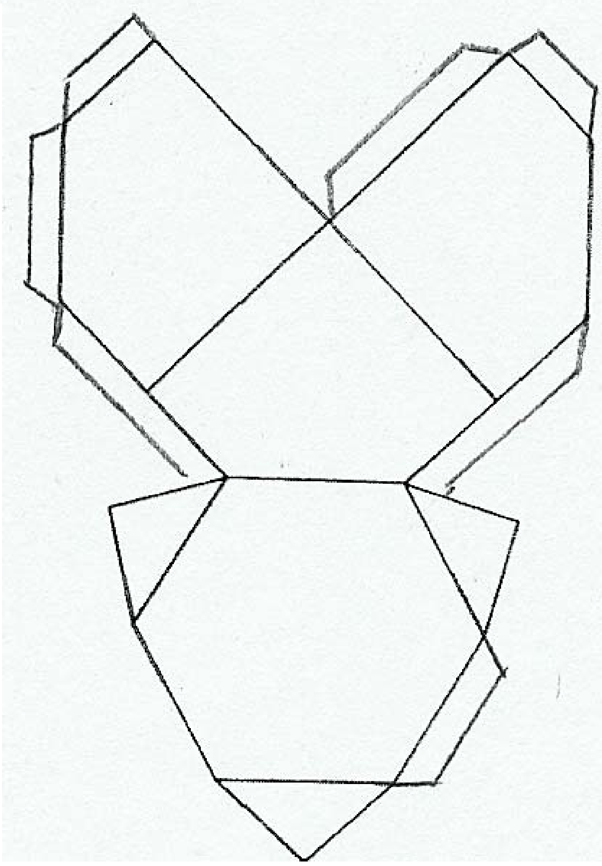
Retalla els següents desenvolupaments plans, apega'ls i col·loca'ls en el tredre d'espills. Descriu en cada cas els sòlids obtinguts en el calidoscopi. De quins poliedres es tracta?.

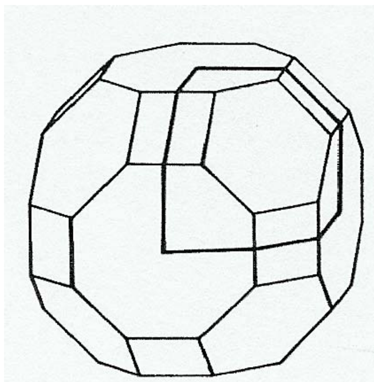


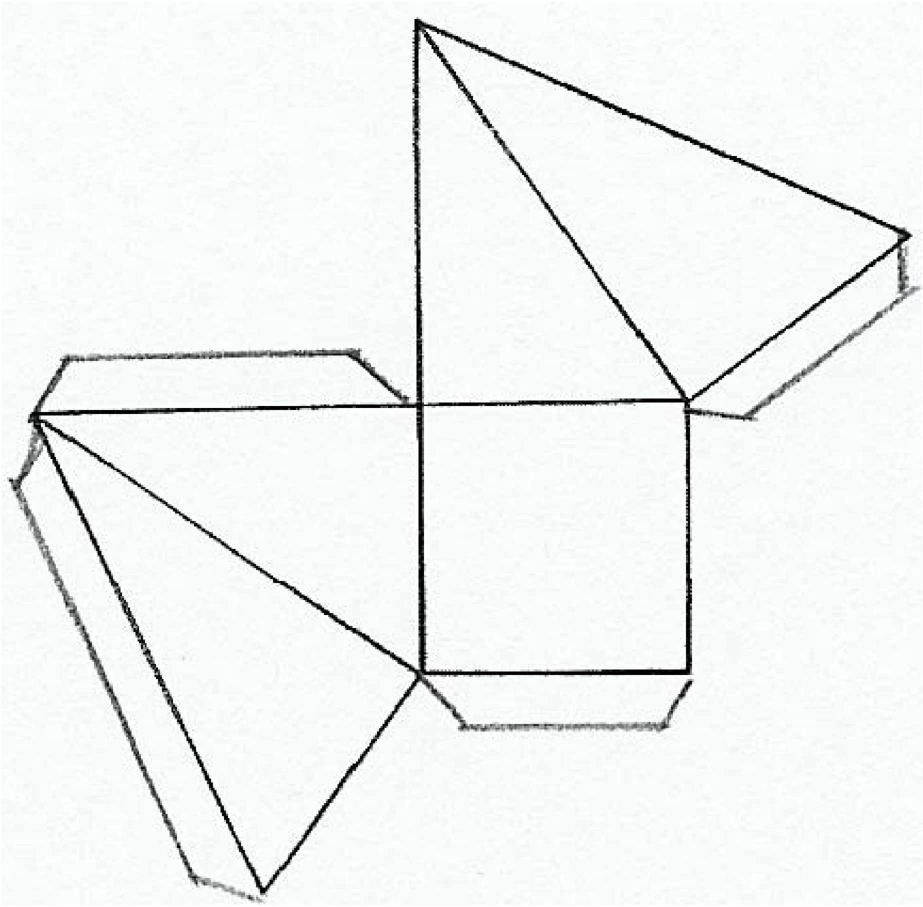


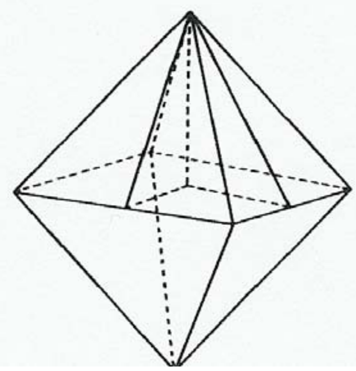










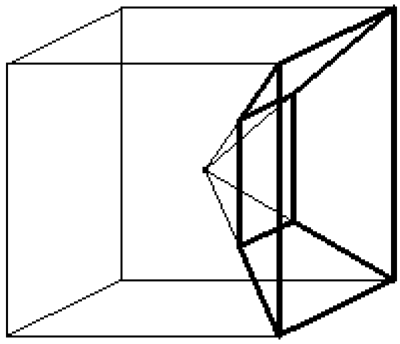


- **CALIDOSCOPIS POLIÈDRICS**

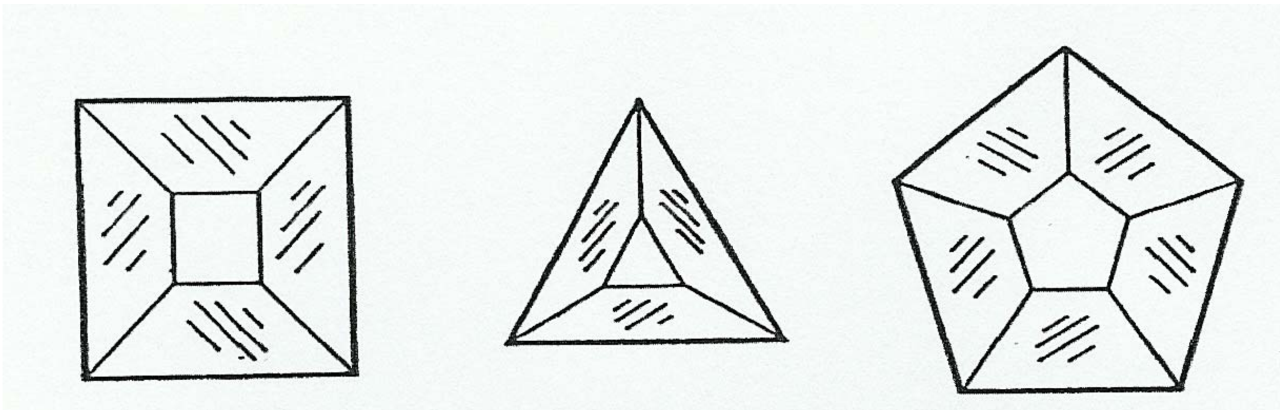
Els calidoscopis estan formats per espills amb forma de triangles isòsceles que estan units entre si. Quan en estos calidoscopis es col·loquen mòduls en diferents posicions, s'observa que la forma resultant depén:

- Del mòdul que s'incrusta.
- Del nombre d'espills que formen el calidoscopi.
- De l'obertura dels espills, és a dir, de l'angle del triangle isòsceles que concorre en el cantó del calidoscopi.

Dels possibles calidoscopis amb què es poden generar cada un dels 5 poliedres regulars, anem a centrar-nos en els que s'obtenen ajuntant el centre de cada un d'estos poliedres amb els vèrtexs d'una cara.



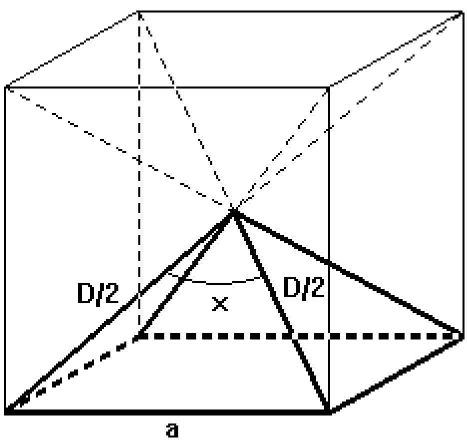
Si els trunquem per un pla que passe per punts equidistants del vèrtex, podrem recolzar-los sobre el polígon resultant, presentant l'aspecte següent:

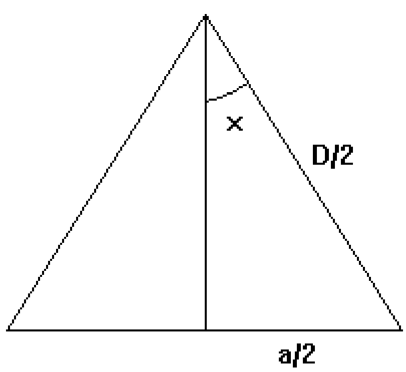


cúbico tetraédrico dodecaédrico

Per a construir el calidoscopi octaèdric o tredre trirectangular d'espills, basta aconseguir tres espills iguals amb forma de triangle rectangle i després ajuntar-los per a obtindre el tredre.

Els triangles dels altres caleidocicles es poden determinar utilitzant ferramentes trigonomètriques. Vegem com determinar l'angle desigual del triangle isòsceles de l'espill d'un calidoscopi cúbic.





Tal angle x té per costats la mitat de la diagonal del cub, D/2. Observant la figura, veiem que:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{D/2}{a/2}=\frac{a/2}{\sqrt{3}\,a/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}577350269\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=\operatorname{sen}^{-1}(0{,}577350269)=35{,}26438968$$

Per tant, l'angle buscat és: x=2×35,26438968° = 70,52877937° = 70° 31' 44"

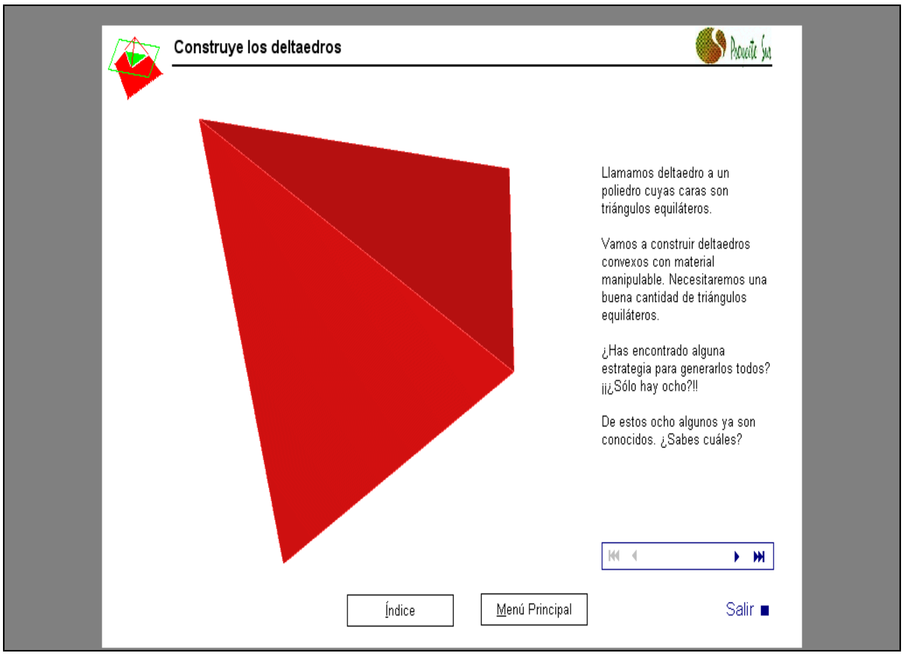
Utilitza un procediment semblant per a trobar l'angle de l'espill dels calidoscopis tetraèdric, dodecaèdric i icosaédric. Comprova els valors de la taula següent:

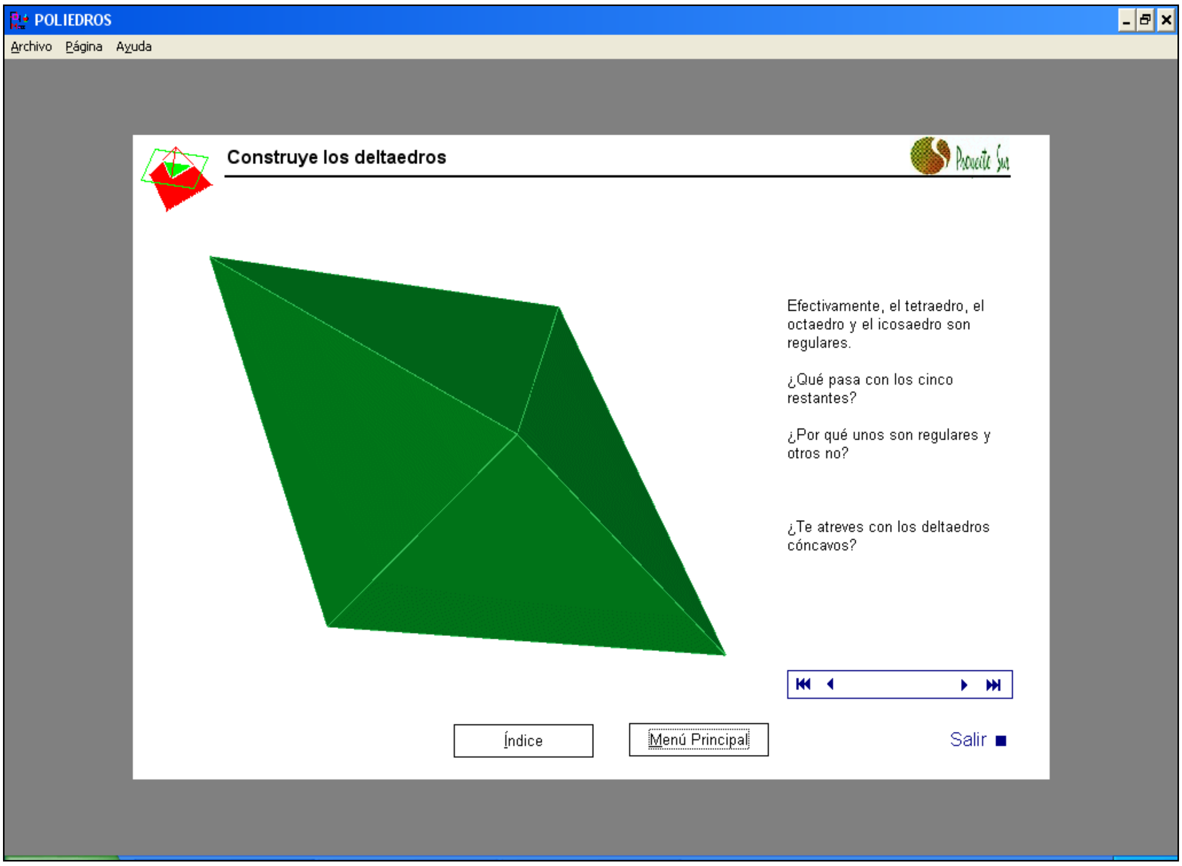
	TETRAÈDRIC	CÚBIC	OCTAÈDRIC	DODECAÈDRIC	ICOSAÉDRIC
Angle del triangle de l'espill	109° 28' 16"	70° 31' 44"	90°	41° 48' 37"	63° 26' 6"

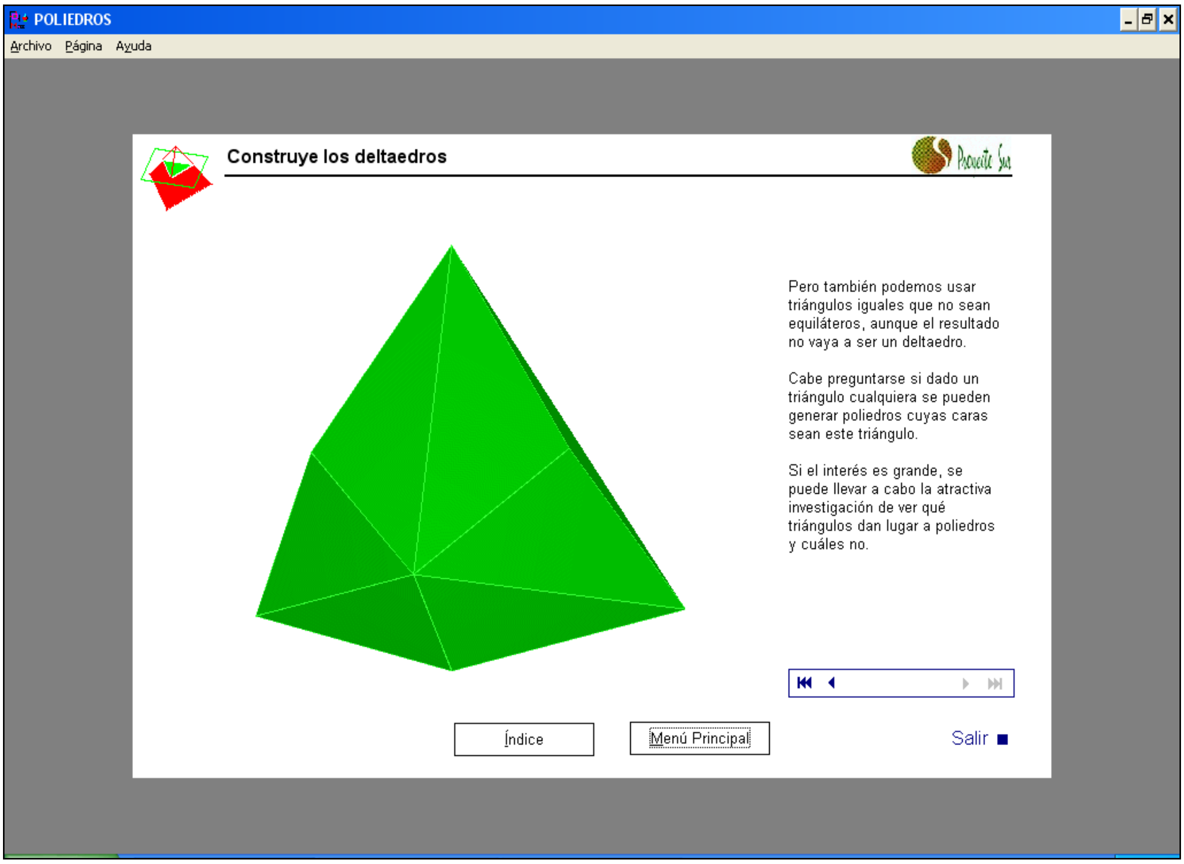
6. Poliedres Projecte Sud

- **PROJECTE SUD**

El projecte Sud és un treball de l'editorial Sur que ha implementat un programa per ordinador sobre poliedres. Es un treball descriptiu, on es mostren les propietats més importants dels políedres i conté també un conjunt d'activitats sobre poliedres que es poden aprofitar per al treball de classe. Mostrem a continuació algunes de les pantalles d'aquest programa:




POLIEDROS
Archivo Página Ayuda
Construye los deltaedros
Efectivamente, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro son regulares.
¿Qué pasa con los cinco restantes?
¿Por qué unos son regulares y otros no?
¿Te atreves con los deltaedros cóncavos?
Índice
Menú Principal
Salir


POLIEDROS
Archivo Página Ayuda
Construye los deltaedros
Pero también podemos usar triángulos iguales que no sean equiláteros, aunque el resultado no vaya a ser un deltaedro.
Cabe preguntarse si dado un triángulo cualquiera se pueden generar poliedros cuyas caras sean este triángulo.
Si el interés es grande, se puede llevar a cabo la atractiva investigación de ver qué triángulos dan lugar a poliedros y cuáles no.
Índice
Menú Principal
Salir