MATERIALES DE MATEMÁTICAS PARA 4º CURSO DE E.S.O.

FÓRMULAS Y GRÁFICAS

Actividades para las alumnas y los alumnos

Javier Alfonso Fayos
Albert Ángel i Selfa
J. Fernando Juan Garc¡a
Joan Morant i Gomar
Chelo Talavera Peñaranda

(Col.lectiu Mosaic)

Dibujos:
Josep Garcia i Torres

Traducción:
J. Fernando Juan Garc¡a

Tratamiento de textos:
Vicenta Palanca Esteso

COLECCIÓN: MATERIALES REFORMA. M - 12
TÍTULO: ÁLGEBRA. GRÁFICAS
EDITA: GENERALITAT VALENCIANA, CONS. CULTURA, EDUCACIÓN Y CIENCIA, D.G. ORD. E INNOVACIÓN EDUCATIVA, PROGRAMA II. Y REFORMAS EXPER.
1ª EDICIÓN
DISEÑO COLECCIÓN: VOLÚMENES ALTERADOS S.A.L.
I.S.B.N.: 84-482-0109-4
D.L.: V-208-1993
IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Impreso por:
GRÁFIC-3 S.A.
C/ Pintor Sorolla, 12 Pol. Ind.Ciudad Mundeco. 46930 QUART DE POBLET - VALENCIA

FÓRMULAS Y GRÁFICAS

4º E. S. O.

ÍNDICE ÍNDICE AMPLIADO

LENGUAJE GRÁFICO

LENGUAJE ALGEBRAICO

ECUACIONES Y SISTEMAS

SUCESIONES

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

INVESTIGACIONES Y PROBLEMAS

ÍNDICE AMPLIADO

LENGUAJE GRÁFICO 6
EL VIENTO 7
LA NORIA 8
BUSCANDO 9
GRÁFICAS I 9
GRÁFICAS II 11
UN SALTO INFINITO (I) 12
UN SALTO INFINITO (II) 12
EL APARCAMIENTO 13
LENGUAJE ALGEBRAICO 14
CASILLAS Y NÚMEROS 15
EL CUADRADO ALGEBRAICO 16
PAREJAS 17
ADIVINANDO CARTAS 18
ADIVINANDO NÚMEROS 19
COINCIDENCIA 19
DOS CIFRAS 19
ECUACIONES Y SISTEMAS 20
DOS AÑOS DE AUMENTO 21
EL JARDÍN 21
¡PÁRATE! 22
CUADRADOS Y RECTÁNGULOS 23
SUMA Y PRODUCTO 23
EL TÚNEL 24
VELOCIDAD MÍNIMA 25
EL GLOBO 26
SUCESIONES 27
TRAMA CUADRADA 28
SUMAS ITERADAS 29
CONVERGENCIA 30
DOS TENDENCIAS 31
EL SUPERCANGURO PEREZOSO 32
TÉRMINO 100.000 32
LA MATELOMBRIZ 33
FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA 34
CRECIMIENTO EXPONENCIAL 35
LA MEIOSIS 36
EME-EME 37
EN BUSCA DE LOS LOGARITMOS 38
PETRÓLEO 40
POBLACIÓN MUNDIAL 40
POBLACIÓN MUNDIAL 41
INVESTIGACIONES Y PROBLEMAS 42
CAMBIO DE PRECIOS 43

DOS POR UNO 44
LA MOTO DE ANDREA 45
SUMAS CONSECUTIVAS 46
INSTRUMENTOS DE MEDIDA 46
LA CARRERA 47
LAS PULGAS 47
NÚMEROS OCULTOS 47
NÚMEROS OCULTOS 48
CUADRADO NUMÉRICO 48

LENGUAJE GRÁFICO

EL VIENTO
LA NORIA
BUSCANDO
GRÁFICAS I
GRÁFICAS II
UN SALTO INFINITO (I)
UN SALTO INFINITO (II)
EL APARCAMIENTO

EL VIENTO

Un ciclista, si no hay viento, tarda 2 horas en ir de B a A y 2'5 horas en volver, con una velocidad media de ida y vuelta de 32 km/h.

El viento puede llegar a provocar un aumento o disminución de hasta 20 km/h en la velocidad.

Estudia en una gráfica cómo varía el tiempo invertido en el mismo recorrido cuando hace viento en dirección de B a A, si la variación de la V que provoca es:

v (Km/h)	3	5	8	10	15	20		
t								

LA NORIA

En la feria hay una gran noria de 10 metros de radio, que da una vuelta completa en 1 minuto. Las cestas están sujetas a ella a una distancia de 1 metro de los asientos.

Haz la gráfica de la altura a que se halla una cesta a lo largo del tiempo.

A las 12 en punto, Pedro está en el lugar más alto. Si una vuelta completa dura 1 minuto,

-¿En qué punto de la noria se hallar a las 12 y 42 segundos?

-¿Dónde se hallaba a las 11 h. 59 min. y 40 s.?

BUSCANDO

Busca parejas de números que cumplan que la suma de sus cuadrados sea 4.

Utiliza un diagrama cartesiano para representar todas las parejas que encuentres.

¿Crees que todos los puntos se deben unir con segmentos de recta?

GRÁFICAS I

Dada una representación gráfica en unos ejes cartesianos, puede haber una expresión algebraica asociada a dicha gráfica.

Intenta relacionar cada una de las gráficas que siguen con una de estas expresiones:

a) y = -4x + 1 b) y = x - 3 c) y = x

d) y = 2x + 1 e) y = -1 f) $y = \frac{x-5}{4}$

g) $y = -\frac{x}{2}$ h) $y = \frac{-x+3}{3}$

GRÁFICAS II

Ahora que ya sabes algunas cosas sobre una gráfica y su expresión algebraica, intenta hallar la expresión correspondiente a cada una de las siguientes representaciones gráficas:

UN SALTO INFINITO (I)

$$5 \times 0.2 = 1$$

Halla otras parejas de números que al ser multiplicados, den 1 como producto. Represéntalas en un diagrama cartesiano (utiliza el eje de abscisas para el primer número de cada pareja y el de ordenadas para el segundo). Observa la gráfica resultante y complétala hasta hacerte una idea de conjunto.

Si todavía no lo has hecho, amplía la gráfica utilizando también números negativos. Al considerar el cero como primer número de una pareja: ¿qué ocurre? ¿Cómo ha quedado reflejada esa situación en la gráfica?.

Rellena esta tabla:

Si el primer número es	0.1	0.01	0.001	10^{-4}	10^{-5}	-0.1	-0.01	...
El segundo ha de ser								

Haz un resumen de tus conclusiones.

Repite todo el proceso considerando diferentes valores para el producto constante. (Por ejemplo, parejas de números que al ser multiplicados den 10). ¿Se puede considerar un producto menor que 1?. ¿Puede llegar a ser negativo?.

Compara las distintas gráficas.

UN SALTO INFINITO (II)

Estudia ahora esta otra situación: el primer número se eleva al cuadrado. El resultado se multiplica por el segundo número. El producto tiene que ser 1.

Por ejemplo, con 2 y 0.25: $2^2 \times 0.25 = 1$

Compara con los casos anteriores.

EL APARCAMIENTO

Haz una tabla que recoja los diferentes tiempos de estacionamiento, con los precios respectivos, para períodos de tiempo comprendidos entre 0 y 24 horas.

Completa el estudio con la representación gráfica correspondiente. ¿Es continua la gráfica? Si no es así: ¿en qué períodos de tiempo se produce discontinuidad? ¿Qué significado tienen esas discontinuidades en la práctica, para un posible cliente de este aparcamiento? ¿Son con salto infinito?

TARIFA DE PREUS

* Mínim 250

* A partir de les dues primeres hores: per cada hora o fracció..... 50

* Màxim diari: 500

LENGUAJE ALGEBRAICO

CASILLAS Y NÚMEROS
EL CUADRADO ALGEBRAICO
PAREJAS
NÚMEROS PARES E IMPARES
ADIVINANDO CARTAS
ADIVINANDO NÚMEROS
COINCIDENCIA
DOS CIFRAS

CASILLAS Y NÚMEROS

Rellena las casillas vacías con la condición de que el valor de cada una sea el resultado de restar al doble del valor situado a su derecha, el valor situado a su izquierda.

1	**4**			

1		**4**		

1			**4**	

1				**4**

Estudia parejas de números a, b para los que sea posible rellenar las otras casillas, si el valor de cada una coincide con la suma de los números que ocupan las casillas contiguas.

a			**b**	

EL CUADRADO ALGEBRAICO

Aquí tienes un cuadrado con expresiones algebraicas en sus casillas.

x + y	4(x-1)	y
x	3y +2	x + y
3x -y	2(y-3)	2x-1

a) Pon en cada casilla su valor numérico, sabiendo que $x = 3$ e $y = -1$.

b) Determina los valores que deben tener x e y para que la suma de los elementos de la primera diagonal sea 6 y la de los de la segunda sea 5.

Haz lo mismo que en el apartado a) pero con los valores que tú has encontrado para x e y.

c) ¿Puede haber algún valor de x e y de manera que la suma de los elementos de la primera fila coincida con la suma de los elementos de la primera columna?

d) ¿Puede haber algún valor de x e y de forma que la suma de cada columna sea 10?

e) Inventa tú otras preguntas e intenta resolverlas.

PAREJAS

Busca parejas de números a, b tales que su producto sea 12 y que se aproximen lo más posible a cumplir cada una de las siguientes condiciones.

-La suma sea 9 (a + b)

-La diferencia sea 3 (a-b)

-El cociente sea 2 (a : b)

-La suma de los recíprocos sea 1 ($\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$)

NÚMEROS PARES E IMPARES

La expresión 2n la utilizan frecuentemente los matemáticos cuando quieren referirse a cualquier número par. Se entiende que si en ella sustituimos n por cualquier número entero positivo, el resultado ser un número par. Igualmente, dado un determinado número par, siempre ser posible encontrar el valor de n que le corresponde. Compruébalo.

Halla una expresión parecida para los números impares. Utiliza esta forma de representar números para demostrar que PAR + PAR = PAR.

Completa las siguientes igualdades y demuéstralas:

PAR + IMPAR =

IMPAR + IMPAR =

PAR x PAR =

PAR x IMPAR =

IMPAR x IMPAR =

ADIVINANDO CARTAS

Javi es amigo de Chelo y de Albert. Un día que estaban juntos los tres, Javier le dice a Albert:

"Piensa una carta de la baraja de 40 y se la dices a Chelo. Chelo: multiplica por dos el valor de la carta, súmale 1, multiplica el resultado por cinco y súmale para acabar el palo de la baraja (O=1 C=2 E=3 B=4).

Dime qué te da. Chelo contesta: 19.

La carta que Albert te ha dicho es el as de bastos".

¿Sabrías decir qué ha hecho Javi para adivinar la carta?.

¿Y si hubiera salido el 20: de qué carta se trataría?.

¿Podría salir el número 14?.

ADIVINANDO NÚMEROS

Javi, que es bastante mago, vino otro día con un truco de adivinación y les dijo a sus amigos:

"Pensad dos números. Multiplicad uno de ellos por cinco y al resultado sumadle 7; después multiplicad por dos y sumadle el otro número. ¿Qué os da?" Contestaron: "60".

Rápidamente Javi dijo: "Habéis pensado el 4 y el 6".

¿Cómo lo ha hecho esta vez?.

COINCIDENCIA

Dos grupos de trabajo hacen dos actividades en la clase de matemáticas. Uno investiga pares de números a , b tales que la suma sea igual que el producto; el otro, pares de números a, b que verifiquen que la suma de sus inversos (1/a, 1/b) sea la unidad. Descubren que se trata de los mismos pares de números. Investiga cuáles son y la causa de la coincidencia.

DOS CIFRAS

Investiga números de dos cifras tales que al restarles el producto de sus dos cifras, el resultado sea 16. ¿Podría obtenerse cualquier resultado?.

ECUACIONES Y SISTEMAS

DOS AÑOS DE AUMENTO
EL JARDÍN
¡PÁRATE!
CUADRADOS Y RECTÁNGULOS
SUMA Y PRODUCTO
EL TÚNEL
VELOCIDAD MÍNIMA
EL GLOBO

DOS AÑOS DE AUMENTO

En una tienda han subido los precios el mismo tanto por ciento durante dos años consecutivos.

Fijándote en la primera línea, completa la tabla. (Redondea los precios a cantidades enteras).

%	P.V.P. inicial	P.V.P. 1er año	P.V.P. 2º año
4	2000	2080	2163
4		3276	
4	3500		
	2500	2625	
		3650	3869
	4200		4630

a) Intenta establecer un método para pasar de la segunda columna a la tercera y viceversa.

b) Haz lo mismo para la tercera y cuarta columnas, y para la segunda y cuarta.

c) Simplificando el proceso y suponiendo un aumento del 4% cada año durante un largo período de tiempo: ¿Cuántos años deben transcurrir para que un artículo que costaba 3700.- pase a costar 5266 pesetas?.

EL JARDÍN

El propietario de un jardín cuadrado de 36 m^2 quiere construir un estanque, también cuadrado, en el centro, de lados paralelos a los del jardín. La condición que impone al albañil es que ocupe la mitad de la superficie del jardín.

El albañil quiere saber a qué distancia están los lados. ¿Podrías ayudarle?

¡PÁRATE!

Un conductor tarda 1.2 seg. en reaccionar desde que tiene intención de frenar hasta que lo hace.

La distancia que recorre después de frenar es, en metros $\frac{v^2}{20}$ (V en Km/h)

-Completa la siguiente tabla de datos.

v en km/h	e distancia en reaccionar	d distancia total
36 km/h	12 m	76'8 m
	20 m	
60 km/h		
		132 m

-Relaciona v, e, d

-Haz una gráfica distancia-velocidad.

CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

Trazando paralelas a los lados de un cuadrado, éste queda dividido en un conjunto de cuadrados y rectángulos, tal como se ve en el dibujo.

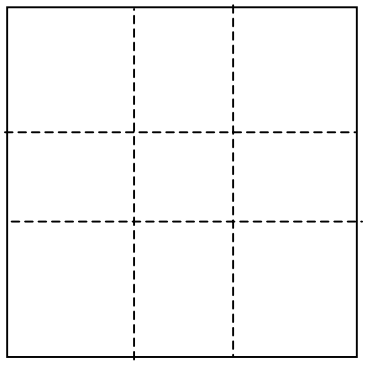
Halla, en cada caso, a qué distancia de los lados deberán estar estas paralelas para conseguir:

Que el área del cuadrado central sea igual a la de todos los cuadrados de las esquinas (a la suma de las cuatro).

Que sea el doble.

Que sea el quíntuplo.

Que el área de todos los cuadrados sea el doble que la de todos los rectángulos.



SUMA Y PRODUCTO

-¿Qué es mayor $x + y$ ó $x \cdot y$?

-¿Qué valores deben tener x e y para que $x + y = x \cdot y$?

-¿Qué ocurre cuando $x = 1$?

EL TÚNEL

Muchas veces habrás visto una señal como esta:

Con ella se advierte de la prohibición de circular a vehículos de altura superior a la indicada.

Pensemos ahora en el diseño de un túnel recto por donde transitan los vehículos de una carretera, en un solo sentido:

Una de las soluciones posibles es construirlo con una sección transversal semicircular. Supongamos que éste es el caso y que el diámetro de la semicircunferencia es de 8 m. ¿Cuál es la anchura máxima que podría tener un vehículo de 3.5 m. de altura para poder atravesar este túnel? (Halla la solución teórica y después piensa en los márgenes de seguridad que habría que tener en cuenta). ¿Podría pasar por el túnel un vehículo de 4.5 m. de anchura? ¿Qué altura, como máximo, podría tener?

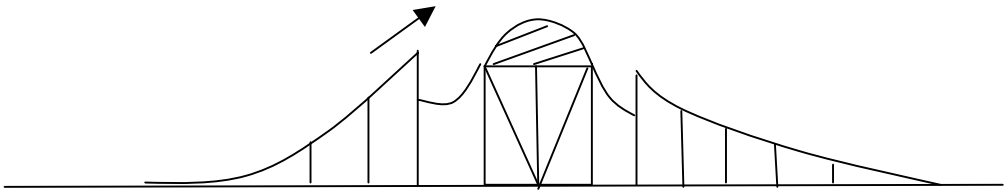
Determina el diámetro que debería tener el túnel si se impone la siguiente condición : anchura máxima para vehículos de 3.5 m. de altura: 4.5 m.

Otra posibilidad consiste en considerar una sección parabólica. Si, por ejemplo, la anchura al nivel del asfalto es de 8 m. y la altura máxima es 5.3 m., la relación entre la altura (A) de cualquier punto del arco de parábola y la distancia (d) desde el mismo punto al eje de la parábola, se puede condensar con mucha aproximación en esta ecuación: $A = 5.3 - 0.33d^2$. De hecho, si haces la representación gráfica correspondiente a esta expresión algebraica, obtendrás un dibujo a escala de la sección del túnel. Resuelve el problema en estas condiciones.

Representa gráficamente las dos posibilidades en un mismo diagrama e intenta decidir para qué alturas es mejor un modelo y para cuáles el otro. Determina para qué altura es exactamente igual la anchura máxima posible.

VELOCIDAD MÍNIMA

Un especialista prepara una exhibición de salto con motocicleta. La rampa de lanzamiento sube gradualmente a una altura de 3 metros, con una inclinación en el último tramo de unos 37°. Desde ese punto, la moto debe volar superando un obstáculo de 4.5 m. de altura, que está situado a una distancia de 4 m. del punto de salto.



El principal problema consiste en determinar la velocidad mínima necesaria para poder superar dicho obstáculo.

Una primera aproximación la podemos encontrar adaptando las ecuaciones básicas del movimiento de graves a las condiciones concretas de este caso:

$$A = 3 + 0.6\ v\ t - 4.9\ t^2$$

$$D = 0.8\ v\ t$$

La primera relaciona la altura en metros (A) cuando ha pasado un tiempo de t segundos desde el instante inicial de un salto hecho con una velocidad v (m/s). La segunda expresa en metros la distancia horizontal (D).

Halla la velocidad mínima necesaria. Cuando la tengas, exprésala en km/h.

En la realidad, hay que considerar también la resistencia del aire, que puede variar según la fuerza y dirección con que sople el viento, y que puede afectar en distinta medida las componentes horizontal y vertical del desplazamiento. Supongamos que, en unas condiciones concretas, este hecho tenga una influencia tal que las ecuaciones anteriores se transformen en las siguientes:

$$A = 3 + 0.6\ v\ t - 5.5t^2$$

$$D = 0.8vt - 0.8t^2$$

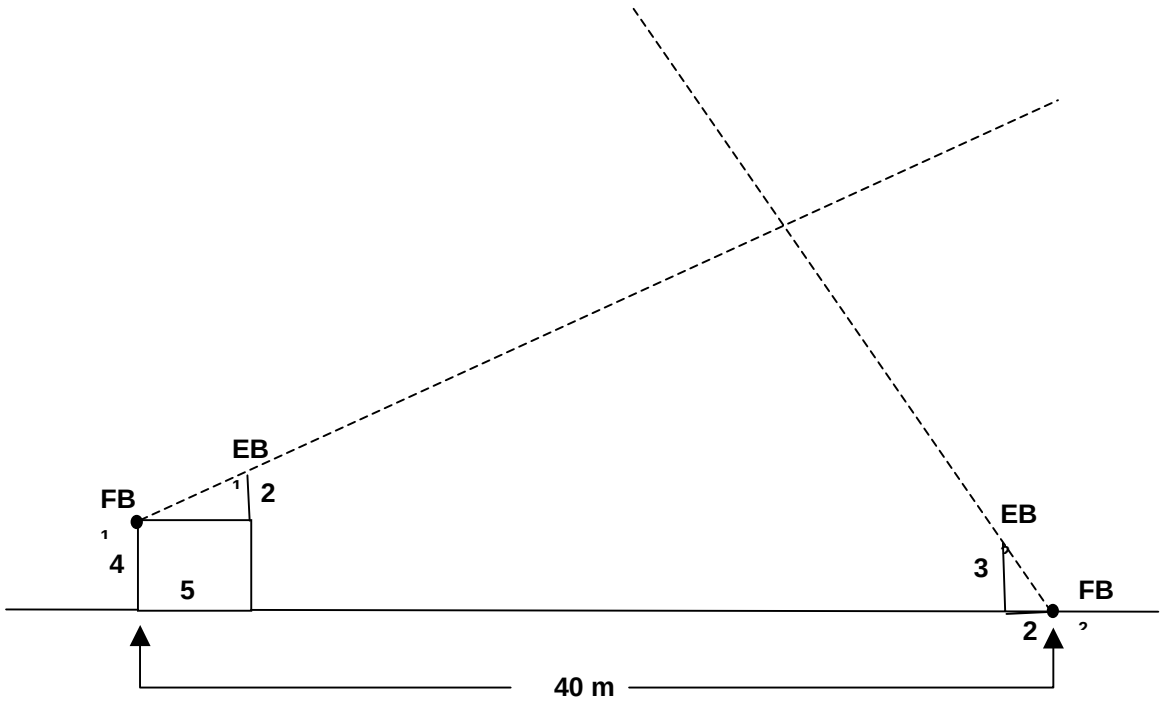
¿Cuál es ahora la velocidad necesaria?

EL GLOBO

Dos focos iluminan dos esculturas situadas en un paseo. En ambos casos hay un haz de luz que se prolonga más allá del objeto iluminado. Los cuatro elementos (focos y esculturas) se hallan en un mismo plano vertical, tal como indica el esquema.

Isabel juega con un globo que lleva atado con un hilo muy largo. Muy concentrada en lo que hace, va soltando el hilo poco a poco, mientras camina e intenta que el globo permanezca continuamente iluminado por la luz de uno de los focos.

Hay un momento en que el globo recibe la luz de los dos focos. ¿A qué distancia horizontal se halla Isabel de cada uno de los focos?

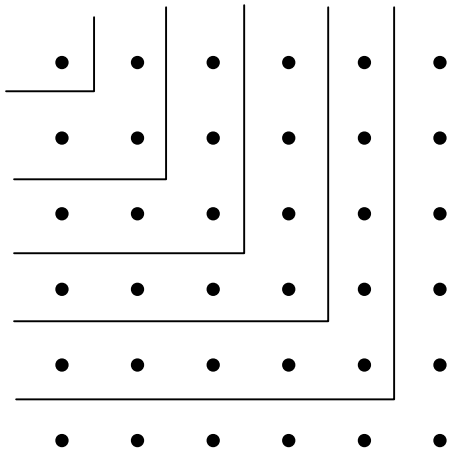


SUCESIONES

TRAMA CUADRADA
SUMAS ITERADAS
SUCESIONES CON CALCULADORA
CONVERGENCIA
DOS TENDENCIAS
EL SUPERCANGURO PEREZOSO
EL TÉRMINO 100.000
LA MATELOMBRIZ

TRAMA CUADRADA

En la figura se muestra cómo dividir un cuadrado en una sucesión de números impares.



Completa las siguientes igualdades:

1 = ____^{2}

1 + 3 = ____^{2}

1 + 3 + 5 = ____^{2}

1 + 3 + 5 + 7 = ____^{2}

1 + 3 + 5 + 7 + 9 = ____^{2}

¿Cuál ser la suma de los quince primeros números impares? ¿Y de los treinta primeros?.

Halla una fórmula para la suma de los n primeros números impares.

¿Cómo calcularías la suma de todos los números impares entre 80 y 110?.

SUMAS ITERADAS

Borra MR (Min) y después

0.5 x x 3 M+, M+, M+ ... n - veces MR

-Investiga MR según el número de veces n.

-Haz lo mismo cambiando el segundo número.

-Investiga MR cuando cambia el primer número:

a) 0.8 x x 3

b) 1.2 x x 3

Investiga

c) a x x 3

SUCESIONES CON CALCULADORA

Piensa un número cualquiera. Introdúcelo en la calculadora. Observa qué sucede al ejecutar repetidamente esta secuencia:

1/x **+** **1** **=**

Si cambias el número con el que empiezas: ¿cómo afecta eso al resultado?. Compara con tus compañeros.

Queremos que analices con detalle un par de aspectos. Para la primera cuestión conviene que escribas la sucesión de números que aparecen después de pulsar la tecla **=**

Fíjate en su forma de acercarse al último número. Escribe todo aquello que te parezca interesante.

Concéntrate ahora en ese último número. Parece que tiene una propiedad bastante especial: si a su inverso (1/x) le sumamos (+) una unidad (1), volvemos a obtener el mismo número. Esto es lo que pasa en la calculadora, pero: ¿es realmente así?. Investiga.

CONVERGENCIA

Chelo y Javi tienen cada uno una calculadora en la mano. Los dos pulsan las teclas siguientes:

Chelo [3] [x] [x] [2]

Javi [3] [+] [+] [2]

después [√] [=] y anotan el número de la pantalla; vuelven

a pulsar [√] [=] y anotan el número, y así indefinidamente.

Javi primero y después Chelo dejan de pulsar las teclas porque observan que se repite el número que anotaban.

- Si cambian los números de entrada 3 y 2 por 4 y 3, ¿también llegar a repetirse?.

- ¿Podrías averiguar de qué número se trata en el caso de Chelo?. ¿Y en el de Javi?.

-Investiga otros números de entrada.

DOS TENDENCIAS

Si al cuadrado de un número le restamos 1, el resultado, ¿es siempre mayor que el número inicial? Investígalo y, teniendo en cuenta tus conclusiones, estudia las diferentes sucesiones que se pueden formar repitiendo indefinidamente el proceso (tomamos cada vez el resultado obtenido, lo elevamos al cuadrado y restamos 1).

Cambia el 1 por otros números. Investiga.

EL SUPERCANGURO PEREZOSO

Cuenta la leyenda que en Australia vivía hace muchos años un supercanguro que podía recorrer de un salto una distancia de 20 metros; pero era un poco perezoso y cada vez que saltaba, recorría la mitad de la distancia del salto anterior.

Al llegar la noche, el supercanguro descansaba para poder, al día siguiente, volver a saltar 20 metros, ya que al final de la jornada acababa agotado.

¿Cuántos saltos tendría que dar el canguro para recorrer 37 metros?.

Suponiendo que en un día el canguro pudiera dar un número infinito de saltos, ¿cuál crees que sería la máxima distancia que recorrería?.

¿Cuántos días necesitaría el canguro para recorrer una distancia de 46 metros?. ¿Y de 94 metros?.

Dado un día cualquiera, ¿cómo expresarías la distancia recorrida en el salto que hace n?.

TÉRMINO 100.000

Estudia la sucesión que se forma mediante este procedimiento: el primer término ser un número cualquiera. Para obtener el segundo, le restaremos su recíproco (1/x en la calculadora). Igualmente, cada término ser la diferencia entre el término anterior y el recíproco correspondiente.

¿Es posible predecir el valor aproximado del término situado en el lugar 100.000?.

Si el tercer término de una de estas sucesiones es -11/30, ¿cuál es el primer término?.

LA MATELOMBRIZ

La matelombriz es un "animal" bastante extraño: está formada por segmentos de longitud variable, que se van creando día a día.

El primer día, consta de un segmento de longitud 1 cm.

El segundo día se añaden 3 segmentos de longitud 1/2 cm.

El tercer día aparecen 5 segmentos de longitud 1/4 cm.

El proceso continúa indefinidamente.

El octavo día de la vida de la matelombriz: ¿cuántos segmentos se crearán?. ¿Cuál será la longitud de cada uno de ellos?.

¿Cuál será la longitud total de la matelombriz el décimo día?. ¿Y el vigésimo?. Generaliza para el enésimo día.

Imagina que este "animal" viviera siglos y siglos. ¿Cómo crees que llegaría a ser de largo?.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

CRECIMIENTO EXPONENCIAL
LA MEIOSIS
EME-EME
EN BUSCA DE LOS LOGARITMOS
PETROLEO
POBLACIÓN MUNDIAL

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Un tipo de bacteria se reproduce por división, de manera que, por término medio, la población se duplica cada hora. Supongamos unas condiciones óptimas de cultivo que hagan posible este ritmo de crecimiento durante un largo período de tiempo.

La tabla siguiente relaciona el tiempo (en horas) transcurrido desde un instante inicial en que la colonia de bacterias ocupaba un volumen de 1 cm3. Complétala, considerando que el volumen se duplica cuando lo hace la población:

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	...
Volumen en cm^3	1	2					

Halla una expresión algebraica que relacione el volumen ocupado por la colonia de bacterias con el tiempo transcurrido y representa en un diagrama cartesiano las parejas de valores que has hallado.

Pensemos ahora en cómo se desenvuelve este proceso: sería demasiado simplista imaginar que todas las bacterias se dividen en el mismo instante. Eso significaría que, por ejemplo, pasados 59 minutos y 59 segundos desde que depositamos 1 cm^3 de cultivo en el recipiente adecuado, el volumen continúa siendo 1 cm^3, y que un segundo después (cuando se cumple la hora exacta) el volumen pasa a ser de golpe 2 cm^3. Más razonable (y más de acuerdo con los procesos de la Naturaleza) resulta considerarlo como un proceso gradual en el que el número de bacterias (y el volumen) crece de un modo más o menos continuado, llegando a duplicarse aproximadamente al cabo de una hora. Teniendo presente esta consideración, piensa si es o no conveniente unir los puntos de la gráfica que has hecho. Si te parece que sí, hazlo de la manera que creas más adecuada.

Y ahora llegamos al punto más interesante: cuando han pasado dos horas y media desde que comienza el cómputo del tiempo: ¿crees que el volumen ser inferior a 6 cm^3, superior, o igual?. Piensa en ello con detenimiento y explica tu elección. Después, reconsidera la gráfica y modifícala si no se ajusta a esta última consideración. Determina sobre ella cuál ser aproximadamente el volumen correspondiente. Haz lo mismo con 3.5 horas y con 1.9. ¿Qué operación crees que deberíamos hacer con estos números para obtener los resultados exactos?. Busca en la calculadora alguna tecla que pueda efectuarla y compara los resultados que obtengas con los anteriores.

Pensemos ahora en otro aspecto. Imaginemos que el instante cero (cuando hay 1 cm^3) corresponde a las 8 de la mañana del día de hoy. ¿Qué volumen habrá habido a las 7 h.? ¿Y a las 5.30 h.? Completa la gráfica con la ayuda de la calculadora.

Y, para acabar, una curiosidad: una estimación del volumen del Sol nos dice que éste es de unos 1027 m^3. Si la reproducción de estas bacterias pudiera mantenerse indefinidamente, ¿cuántos años crees que habrían de pasar hasta que la colonia de bacterias ocupara un volumen igual al del Sol?: ¿decenas, millares, centenares...? Con la calculadora, un poco de ingenio y paciencia, podrás averiguarlo, aunque sea de manera aproximada.

LA MEIOSIS

La meiosis es un proceso de división celular mediante el cual cada célula se divide en otras cuatro en un período de tiempo determinado.

Completa la tabla siguiente:

Período	0	1	2	3	4	5	
Nº Células	1						

a) Representa en una gráfica los datos obtenidos.

b) Intenta hallar una expresión algebraica que relacione el número de células existentes (y) con el número de períodos transcurridos (x).

c) Si en un determinado cultivo hay 1024 células, averigua cuántos períodos deben transcurrir para que se transformen en 262144 células. ¿Cuál es ahora la expresión que relaciona y con x?. ¿Cuántos períodos de tiempo han transcurrido desde que teníamos una célula?.

EME-EME

"La señora Muchos Millones (M.-M. para los amigos) ha dejado los negocios. La historia de su enriquecimiento ha sido muy sorprendente: comenzó invirtiendo sólo 1 peseta en un negocio familiar. Después de un año, esta peseta le había dado 9 de beneficio. Satisfecha con el hecho de haber multiplicado por 10 su capital, decidió mantener las 10 pesetas en el negocio (al fin y al cabo podía vivir de su sueldo, y 10 pesetas no habrían de cambiar su nivel de vida). Durante el segundo año, el capital continuó aumentando con la misma vertiginosa rapidez. Ahora tenía 100 pesetas y decidió no moverlas y continuar sumando los beneficios a la inversión. No siempre le ha resultado fácil; pero unas veces la suerte, otras la intuición y, en más de una ocasión, quien sabe si ciertas maniobras no muy transparentes, han hecho posible que M.-M. haya visto multiplicarse por 10 su capital, año tras año, hasta el día de ayer cuando, cumplidos 11 años y 4 meses desde su inversión inicial, decidió retirarse."

(De la revista imposible Mentiras de sociedad)

Imagina que el capital ha ido acumulándose de manera continuada y resuelve las siguientes cuestiones:

-¿Cuánto dinero tenía M.-M. al acabar el quinto año? ¿Y el octavo? ¿Con cuánto dinero se retiró?

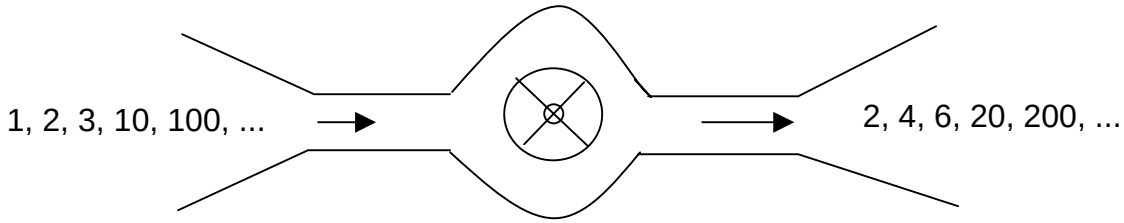
-¿Cuándo llegó a tener un millón de pesetas? ¿Y 1000 millones?

¿Qué has hecho para poder contestar las dos últimas preguntas? ¿Lo podrías hacer también con esta cantidad: 311622.777 pesetas? Escribe la ecuación correspondiente. ¿Puedes decir, al menos, durante qué año llegó a acumularse esa cantidad? Haz, en todo caso, una representación gráfica(!) y vuelve a pensar sobre ello. Intenta dar una solución aproximada basándote en la gráfica. Utiliza la calculadora para comprobar y mejorar la solución.

Cuando ya tengas una buena solución (pero no antes) introduce en la calculadora el número 31622777 y pulsa la tecla LOG. Compara el resultado con tu solución. Prueba con otros números; por ejemplo con 100, 8000, 10000, 630000, y todos los que tú quieras. ¿En qué consiste la operación que efectúa la calculadora con la tecla LOG?.

EN BUSCA DE LOS LOGARITMOS

Una máquina de función es un aparato que fabrica números a partir de otros que nosotros le proporcionamos. Observa lo siguiente:



¿Qué ha hecho esta máquina?

Tu calculadora es una máquina de función. O mejor, un montón de máquinas de función condensadas en un pequeño aparato. Observa lo siguiente:

2 [x] 1 =

2 [x] 2 =

2 [x] 3 =

2 [x] 4 =

- ¿Qué números nos devuelve la calculadora?.

- ¿Podrías prolongar la serie otras cuatro líneas más?.

- ¿Podrías explicar con claridad qué hace la calculadora?.

Fíjate en que tu calculadora tiene una tecla marcada con log. Esta tecla, como antes, transforma los números que tú le facilitas en otros bien definidos. Bien definidos quiere decir que cada vez que pongas en la máquina el 10, ésta te devolverá el 1, y nunca te devolverá otro. Completa la serie:

1 **LOGP** =

2 **LOGP** =

3 **LOGP** =

Prolonga la serie y observa que has obtenido números con bastantes decimales. Busca números de entrada que nos den salidas enteras. Continúa introduciendo números hasta que estés en condiciones de dar una explicación satisfactoria de lo que ha hecho la máquina

-¿Qué ocurre con el cero?.

-¿Qué ocurre con los números negativos?.

-Cuando hayas dejado claro qué es lo que hace la máquina observa que:

2 **LOGP** + 3 **LOGP** = 6 **LOGP**

Busca otras relaciones de este estilo.

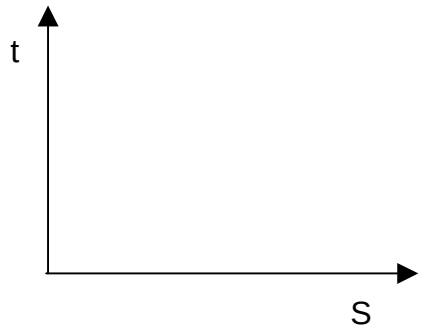
PETRÓLEO

Los técnicos predicen que durante los próximos 15 días, una mancha de petróleo que tiene ahora 3 km^2 duplicar su superficie cada período de 16 horas aproximadamente.

-Haz un estudio del comportamiento de la mancha y completa la tabla siguiente, donde t es el tiempo expresado en días y S la superficie aproximada en km^2.

t	2	7			n		
S			10	100		x	

-Representa en una gráfica el comportamiento de la mancha.



POBLACIÓN MUNDIAL

Relaciona la tasa de crecimiento con la población en el año 2000 y 2025.

-En la primera columna, los datos de China, India y Japón están equivocados. ¿Podrías tú deducir los datos correctos?.

-Amplía otra columna que muestre la población en el año 1950.

INVESTIGACIONES Y PROBLEMAS

CAMBIO DE PRECIOS
DOS POR UNO
LA MOTO DE ANDREA
SUMAS CONSECUTIVAS
INSTRUMENTOS DE MEDIDA
LA CARRERA
LAS PULGAS
NÚMEROS OCULTOS
CUADRADO NUMÉRICO

CAMBIO DE PRECIOS

Cambia los precios de los artículos de una tienda, ya que el IVA antes era el 13 % y ahora hemos de cargar el 15 %.

Artículos	P.V.P anterior	P.V.P nuevo
A	1.327	
B	530	
C	437	
D	4.735	
E	6.287	
F	143	
G	1.100	

-Estudia la forma más rápida con la calculadora.

-En un artículo no inventariado la diferencia de precio era de 297 pts. ¿Cuánto valía antes y después de la modificación?.

-Con el artículo A la empresa tenía un beneficio de 300 pts. ¿Cuál ha de ser el nuevo precio, con el IVA actualizado, si quiere obtener un beneficio de 250 pts?.

DOS POR UNO

Carmen y Jorge han ido juntos a comprarse unos zapatos. Han aprovechado una ocasión de 2 x 1. Los zapatos que ha elegido Carmen iban marcados con el precio de 2000 pesetas. Los de Jorge estaban a 3500. Como es costumbre en estos casos, han tenido que pagar sólo 3500 pesetas (el precio de los más caros) por llevarse los dos pares.

El caso es que ahora no saben muy bien cómo determinar la cantidad que le corresponde pagar a cada uno. Intenta tú establecer un procedimiento que sea lo más justo posible.

LA MOTO DE ANDREA

Andrea es una chica muy aficionada a las motos y por ello decide comprarse un ciclomotor con el dinero que gana trabajando, ya que el lugar donde trabaja está un poco lejos.

Al comprarlo le han dado un folleto con las características técnicas, en el cual pone entre otras cosas que el combustible debe ser una mezcla de gasolina y aceite en una proporción del dos por ciento de aceite; pero el vendedor le ha dicho que al principio, durante el período de rodaje, la mezcla debe contener un 4 % de aceite.

Con el fin de ahorrarse viajes a la gasolinera, Andrea decide comprar un bidón de combustible y tenerlo en casa.

Cuando pasa el período de rodaje todavía le quedan unos cuantos litros de combustible en el bidón y, como la concentración de aceite ha de ser del 2%, Andrea debe comprar gasolina para añadirla a la mezcla.

Completa la siguiente tabla, en la cual aparecen posibles cantidades de litros de mezcla que le quedan en el bidón.

L. Mezcla (4%)	L. Aceite	L. Gasolina a añadir	L. Mezcla (2%)
23			
34			
	0.4		
	0.64		
		18	
m			
	x		
		a	

Cuando cumple 18 años, Andrea se compra una moto más grande, de segunda mano. Esta consume combustible con un 3,5 % de aceite. ¿Qué deber hacer para subir la concentración, si le quedaban 16 litros en el bidón?. ¿Y si le hubieran quedado 24 litros?.

Halla una expresión que nos permita saber qué debemos hacer con cualquier cantidad de litros.

SUMAS CONSECUTIVAS

Hay números que pueden expresarse como suma de números consecutivos; por ejemplo: 6 = 1 + 2 + 3

Exactamente ¿qué números se pueden expresar de esta manera?.

¿De cuántas formas podríamos expresar un número dado, **a**, como suma de números consecutivos?.

INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Dos instrumentos de precisión para medir masas tienen las siguientes características:

Instrumento A: El último dígito redondea los centigramos.

Instrumento B: El último dígito corresponde a los mg. Sin embargo, se ha detectado un error del 5% respecto del valor real.

-¿Qué instrumento utilizarías para diferentes masas?.

-Al medir un objeto el A marca 74 y el B 699. Averigua el valor real de la masa de este objeto.

LA CARRERA

Dos ciclistas A y B disputan una carrera de una vuelta completa a un velódromo de 500 m. La línea de salida es la misma para los dos, pero corren en sentido contrario.

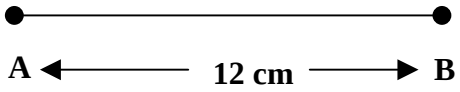
El ciclista A cruza la línea de llegada cuando a B le faltaban 5 m por recorrer.

¿Dónde tendrá que situarse la línea de salida para los dos, para que lleguen al mismo tiempo a la meta?.

LAS PULGAS

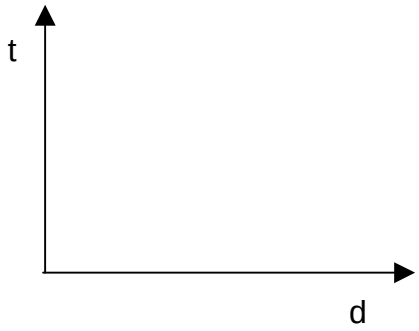
Andrés y Lola tienen dos pulgas amaestradas para hacer carreras. La pulga de Andrés da dos saltos hacia adelante y uno hacia atrás, todos de un cm. y siempre en este orden, en un segundo. La de Lola, algo más caprichosa, en un segundo da 3 saltos hacia adelante y dos hacia atrás, cada uno de un cm. y también en este orden.

Si se hallan de frente en las posiciones A y B, a una distancia de 12 cm., ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?



-Investiga otras distancias.

-Representa en una gráfica:

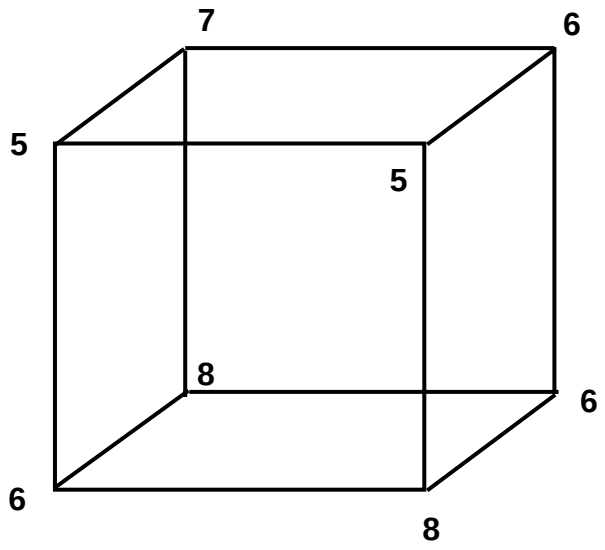


NÚMEROS OCULTOS

Hay un número escondido en cada vértice de este cubo. Los que se ven son falsos. Cada número falso es la media aritmética de los tres verdaderos más próximos.

Investiga cuáles son los números verdaderos.

Investiga propiedades numéricas que relacionen los verdaderos y los falsos.



CUADRADO NUMÉRICO

Nueve puntos de información están identificados como las nueve casillas de este cuadrado, donde cada uno de los números es la media aritmética de los valores reales de las vecinas que tienen un lado en común con la que lo contiene. Investiga el valor real que tienen. Investiga otros cuadrados.

Anota las regularidades y propiedades que descubras.

9	9	12
13	15	17
18	21	21