

**TEMAS DE MATEMÁTICAS REVÁLIDA GRADO SUPERIOR
(5º Y 6º CURSO DE BACHILLERATO AÑOS 50)
Examen para estudiantes de 16 años de edad
(cada problema 2 puntos; cada cuestión 1,5 puntos)**

1

PROBLEMAS:

- 1º.- Aplicando la relación $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-a \cdot b}$, calcular $2 \cdot \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$ y simplificar el resultado.
- 2º.- Estudiar y representar gráficamente la función $y = x^3 - 3x + 2$

CUESTIONES:

- a) Define probabilidad de un suceso. ¿Cuál es la probabilidad de hacer siete tantos con dos dados? ¿Y la de hacer 11?
- b) ¿Cuál es la expresión de $\tan \frac{x}{2}$ en función de $\tan x$?
- c) Partiendo de la ecuación de la elipse referida a sus ejes, deduce la ecuación de la recta que pasa por uno de los focos y por el punto de intersección de la curva con el semieje OY.
- d) Justifica que $\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$
-

2

PROBLEMAS:

- 1º.- A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que el largo de los trozos está en progresión geométrica, determinar la longitud de cada trozo.
- 2º.- Hallar el área de la superficie comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y=2x$.

CUESTIONES:

- a) ¿Es lo mismo cologaritmo de un número que antilogaritmo? Aclara la respuesta.
- b) Escribe en forma trigonométrica el complejo que en forma binómica se escribe $-4 + 4\sqrt{3} \cdot i$
- c) ¿Qué condición han de cumplir las coordenadas de tres puntos para que éstos estén alineados? Razona la respuesta.
- d) Define función derivada y derivada de una función en un punto. ¿Cómo se halla la derivada en un punto cuando se conoce la función derivada?
-

3

PROBLEMAS:

- 1º.- Calculando previamente su módulo y argumento, representar gráficamente las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.
- 2º.- Averiguar la ecuación de una elipse, referida a sus ejes, que pase por el punto (3, 4) y cuya excentricidad es $\frac{3}{5}$.

CUESTIONES:

- a) ¿Qué son sucesiones monótonas convergentes? Pon un ejemplo.
- b) ¿Cómo hallarías el área de un triángulo, conociendo dos de sus lados, y el ángulo que forman? Justifícalo.
- c) ¿Cómo hallarías las coordenadas del baricentro de un triángulo, dadas las coordenadas de sus tres vértices? Justifica la respuesta .
- d) ¿Qué quiere decir que una integral es inmediata? Pon un par de ejemplos.
-

4

PROBLEMAS:

- 1º.- Calcular el módulo y argumento de las soluciones de la ecuación $x^2 - \sqrt{12} \cdot x + 4 = 0$ y hallar: 1) el cociente de estas soluciones; 2) el séptimo término del desarrollo de la potencia duodécima de la solución que tiene por afijo un punto del primer cuadrante.
- 2º.- Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento interceptado por los ejes coordenados en la recta $5x+2y=20$, y determinar la tangente del ángulo que dicha mediatriz forma con la bisectriz del primer cuadrante.

CUESTIONES:

- a) ¿Cómo se calcula el módulo y argumento del número $a+bi$? ¿Qué alteración experimentan al multiplicar dicho complejo por i ?
- b) ¿Cuál es la fórmula de todos los arcos que tienen por secante m ? Dedúcela y haz aplicación para $m = \sqrt{2}$.
- c) Conocidas las ecuaciones de una elipse y una circunferencia, ¿cómo hallarías su posición relativa? Aplícalo al caso siguiente: $x^2 + 9 \cdot y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
- d) Demuestra a quién es igual la derivada de un producto. Aplícalo a $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.
-

5

PROBLEMAS:

- 1º.- Calcular el seno, coseno y tangente de 105° en función del ángulo de 210° .
2º.- Encontrar la ecuación de una circunferencia que tiene por tangente la recta $3x+4y-2=0$ y su centro es el punto $(2, 4)$.

CUESTIONES:

- a) ¿Qué es interés continuo? Deduce su fórmula.
b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto obtenido al girar 90° alrededor del origen el afijo del complejo $2+i$?
c) Deduce la fórmula del ángulo de dos rectas dadas por sus ecuaciones.
d) ¿Cuál es el valor de la $\int \frac{dx}{(x+1)^7}$? Razónalo.
-

6

PROBLEMAS:

- 1º.- Calcular el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$.
2º.- Dada la cónica $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, hallar la nueva ecuación referida a las bisectrices de los ejes, como nuevos ejes coordenados.

CUESTIONES:

- a) Traduce la siguiente fórmula y demuéstrala: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.
b) Expresa la razón de la suma de dos lados a su diferencia, en función de los ángulos opuestos. Justifícalo.
c) ¿Qué es potencia de un punto respecto de una circunferencia? ¿Cómo expresas, analíticamente, la del punto $P(x_0, y_0)$, respecto a $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$? ¿Por qué?
d) Para que una función tenga derivada en un punto, ¿es preciso que la función sea continua en dicho punto? Justifica tu contestación y deduce la derivada de $y = a^x$.
-

7

PROBLEMAS:

1º.- Calcular el valor de la siguiente suma: $y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$

2º.- Estudiar y representar la función: $y = \frac{x}{x^2 + 2}$

CUESTIONES:

- Desarrolla y simplifica todo lo posible la expresión $(3+i)^6$.
 - ¿A qué es igual $\cos \frac{1}{2} \cdot A$ en función de los lados del triángulo? Justifica tu respuesta.
 - Dada la ecuación reducida de la hipérbola, determina las ecuaciones de sus asíntotas.
 - Estudia la diferencia que hay entre derivada y diferencial. Explícalo analíticamente y desde el punto de vista geométrico.
-

8

PROBLEMAS:

1º.- Calcular las raíces cuadradas de $-i$.

2º.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$, y forma un ángulo de 45° con la que pasa por los puntos $(4, 2)$ y $(6, 3)$.

CUESTIONES:

- ¿Cuándo se dice que una sucesión de números reales es convergente, divergente u oscilante? Pon un ejemplo de cada clase.
 - Transforma en producto $1 - \cos x$
 - ¿Qué condiciones ha de cumplir una ecuación de segundo grado con dos variables para que represente una circunferencia? Justifica tu respuesta.
 - Si la función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$, ¿la función es creciente en el punto x_1 ? ¿Por qué?
-

9

PROBLEMAS:

1º.- Calcular las raíces cuartas del complejo $-2 + 2\sqrt{3} \cdot i$.

2º.- Calcula: $\int \left(\sqrt{2 \cdot x} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) \cdot dx$

CUESTIONES:

- ¿Qué propiedad verifican los términos equidistantes de los extremos en una progresión aritmética? Justifica la respuesta.
 - Calcula los valores de i^{17} , i^{240} , i^{5343} .
 - ¿Cómo ha de ser la tangente a una curva en un punto para que en el mismo haya mínimo?. Justifícalo.
 - Si una fracción tiene por numerador la derivada del denominador, ¿cuál será su integral? Razona la respuesta.
-

10

PROBLEMAS:

1º.- Calcular las raíces cuartas del complejo $1+i$.

2º.- Un triángulo rectángulo gira 360° alrededor de uno de sus catetos. Determinar el volumen máximo que puede engendrar, sabiendo que la suma de los dos catetos es igual a 10 dm.

CUESTIONES:

- ¿Por qué al correr la coma en un número decimal, la mantisa de su logaritmo no se altera? ¿Y la característica? Justifícalo.
 - Conociendo $\tan a$, ¿cómo deduces $\sin a$, $\cos 2a$ y $\tan \frac{a}{2}$ en función de aquella tangente?
 - Un punto divide a un segmento en una razón determinada. ¿Cómo hallarás las coordenadas de ese punto en función de las coordenadas de los extremos? Determinálas razonadamente.
 - ¿Cómo reconoces la concavidad de una curva en un punto? Razónalo.
-

11

PROBLEMAS:

1º.- Calcular la suma de los infinitos términos de esta sucesión: $2 - \frac{4}{7} + \frac{8}{49} - \frac{16}{343} + \dots$

2º.- La pendiente de una curva tiene como expresión $y'=2x+3$. ¿Cuál será la ecuación de la curva, sabiendo que corta al eje de ordenadas a la distancia de tres unidades del origen?

CUESTIONES:

- Si con los números 3, 5 y 7 escribes todos los números posibles de dos cifras, sin repetir ninguna de ellas, ¿es lo mismo que hallar todos sus productos binarios? ¿Qué teoría hay que aplicar? Justifica tu respuesta.
 - Para escribir un número complejo, ¿qué argumento debes poner en los siguientes casos?:
1) un número real positivo; 2) Un número real negativo; 3) Un número imaginario positivo; 4) Un número imaginario negativo.
 - Elige pares de rectas que sean paralelas o perpendiculares, entre las siguientes, y justifica la contestación $2x-5y=8$; $5y+2x=8$; $35x-14y=8$.
 - Deduce la derivada de $y=\sec x$.
-

12

PROBLEMAS:

1º.- Calcular la suma de todos los múltiplos de 11 comprendidos entre 1000 y 10000.

2º.- La derivada segunda de un trinomio de segundo grado vale 8. Hallar este trinomio, sabiendo que tiene un mínimo para $x=1$ y que el trinomio se anula para $x=3$.

CUESTIONES:

- Deduce el límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada.
 - Calcula la potencia i^{23} . Razónalo.
 - Deduce la ecuación normal de una recta.
 - ¿Cuál es la derivada de $y=u \cdot v$, siendo u y v funciones de x ? Justifícalo.
-

13

PROBLEMAS:

1º.- Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 8n + 1} \right)$.

2º.- Una pirámide tiene por base un cuadrado de 1 dm de lado; una de sus aristas laterales es perpendicular al plano de la base y mide 3 dm. Se corta esta pirámide por un plano paralelo a la base y a una distancia x de la misma. Hallar el área total del prisma recto que proyecta esta sección sobre el plano de la base de la pirámide, y el valor de x para el cual es máxima dicha área.

CUESTIONES:

- Define teorema contrarrecíproco de otro. ¿Sabes probar que la certeza de una proposición implica la de su contrarrecíproca?
 - ¿Cuál es la expresión de $\tan \frac{x}{2}$ en función de $\cos x$?
 - Define asíntotas de una hipérbola y deduce su ecuación a partir de la ecuación canónica de la misma.
 - ¿Cuál es la significación de $\int_a^b f(x) \cdot dx$ como expresión de un área? Haz aplicación al caso $\int_1^a \frac{dx}{x}$.
-

14

PROBLEMAS:

1º.- Calcular los ángulos menores de 180° que verifican el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \cdot \cos y = \sin x \cdot \sin y \\ x - y = 30^\circ \end{array} \right\}$$

2º.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $x^2 - 8x + 15 - y = 0$ y el eje de abscisas.

CUESTIONES:

- Calcular $\log_8 4$ sin utilizar calculadora.
 - ¿Qué propiedad tiene el producto de dos números imaginarios conjugados? ¿Por qué?
 - Hallar la fórmula de la distancia del origen de coordenadas a una recta.
 - ¿Sabes derivar la función $y = x^2$? Calcúlala.
-

15

PROBLEMAS:

- 1º.- Calcular los lados de un triángulo, conociendo su área=18 dm² y sus ángulos A=30°, B=45°.
- 2º.- Determinar los coeficientes del polinomio $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ de tal forma que para $x=-1$ tenga un valor máximo relativo igual a 11; para $x=5$, tenga un valor mínimo relativo, y para $x=1$ tome el valor -17.

CUESTIONES:

- a) ¿Cuál es la función inversa de $y=1+e^{3x+2}$?
- b) Deduce $\tan(a+b)$ en función de $\tan a$ y $\tan b$
- c) Escribe la ecuación de la paralela a la recta $Ax+By=C$ por el punto $P(x_1, y_1)$.
- d) Si $e=2 \cdot t^3 - 5 \cdot t$ expresa la ecuación de un movimiento, ¿cuál es la de su velocidad? ¿Y la de su aceleración?
-

16

PROBLEMAS:

- 1º.- Calcular $\sin 5x$ siendo $\sin x = \frac{1}{2}$.
- 2º.- Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $8x-4y+9=0$, y pasa por los puntos (1, -2) y (2, 2).

CUESTIONES:

- a) Comprueba la siguiente relación entre números combinatorios: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{n}{k}$
- b) Partiendo de la relación $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ deducir $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$
- c) ¿Qué representa gráficamente la ecuación $x^2 - y^2 = 0$? Explícalo.
- d) Define derivada de una función en un punto. ¿Cuál es la derivada de $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x+1}$ en el punto de abscisa 0?
-

17

PROBLEMAS:

1º.- Calcular el logaritmo de la siguiente expresión: $x = \frac{3,2^3 \times 0,64^5}{0,0125 \times \sqrt[4]{80^3}}$ ($\log 2=0,301030$)

2º.- Desde un punto P de una semicircunferencia de diámetro AB=2 decímetros, se trazan las perpendiculares PC y PD al diámetro y a la tangente en B, respectivamente. Expresar en función de $x=AC$ el área del trapecio APDB, y suponiendo que el punto P recorre la semicircunferencia, calcular el valor de x para el cual es máxima dicha área.

CUESTIONES:

- Define límite de una sucesión de números reales. ¿Qué es un infinitésimo? Aclara tus respuestas con ejemplos.
 - Expresa el área de un triángulo en función de dos lados y del ángulo que éstos forman.
 - Deduce la ecuación de la normal a la parábola $y = 3 \cdot x^2$ en el punto (2, 12).
 - Comprueba que $\int_a^b x^m dx = -\int_b^a x^m dx$
-

18

PROBLEMAS:

1º.- Calcular $x = \log \sqrt[4]{781,25}$, sabiendo que $\log 2 = 0,301030$.

2º.- En un cuadrado de 4 cm de lado inscribir el cuadrado de área mínima.

CUESTIONES:

- Define cologaritmo de un número y deduce la regla práctica para hallarlo.
 - Demuestra la fórmula trigonométrica: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 - ¿Qué es potencia de un punto respecto de una circunferencia? Deduce su expresión analítica.
 - Comprueba que la función $y = e^{a \cdot x} \cdot \operatorname{sen} b \cdot x$ satisface a la relación $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2) \cdot y = 0$
-

19

PROBLEMAS:

- 1º.- Conociendo el primer término, 4; el último, 4096, y la suma, 5460 de los términos de una progresión geométrica, hallar la razón y el número de términos de la progresión.
- 2º.- Un punto recorre en línea recta la distancia $e = \frac{1}{3}t^3 - 16 \cdot t$ en t segundos. Hallar su aceleración en el instante en que su velocidad se anula.

CUESTIONES:

- a) Demuestra que para todo valor real de n, $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
- b) ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de x y -x? Explícalo.
- c) Intersección de una recta con una circunferencia dadas por sus ecuaciones. Discusión.
- d) ¿Qué diferencia hay entre Δy y dy para la curva $y = x^3$, en el punto de abscisa 2, siendo $dx = \Delta x = 10$?
-

20

PROBLEMAS:

- 1º.- Con tres anualidades de 50000 pesetas se ha amortizado un capital de 156080 pesetas. ¿Cuál es el tanto por ciento de interés?.
- 2º.- Representar gráficamente la función $y = -3x^2 + x + 10$, determinando sus puntos notables, así como las tangentes en ellos.

CUESTIONES:

- a) Deduce la fórmula de las anualidades de amortización.
- b) Conociendo las longitudes de los lados de un triángulo, ¿cómo hallas sus ángulos? Dedúcelo.
- c) Dadas dos rectas por sus ecuaciones, ¿sabes obtener la ecuación del haz determinado por dichas rectas? Justifícalo.
- d) Define diferencial de una función. Significado gráfico. Explícalo aplicándolo a la función
- $$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$$
-

21

PROBLEMAS:

- 1º.- ¿Cuál es el logaritmo de $\frac{1}{\sqrt{6}}$ en el sistema de base 216?.
- 2º.- Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ en un punto tal que dicha tangente sea perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

CUESTIONES:

- a) ¿Es lo mismo calcular el interés compuesto al 12 por 100 anual que al 1 por 100 mensualmente? Razona la respuesta.
- b) ¿Cuál es la razón de la suma a la diferencia de los senos de dos ángulos? Demuéstrala.
- c) Explica el significado gráfico de la discontinuidad que presenta la función $y = \frac{1}{x}$.
- d) ¿Cómo se utiliza la derivada de una función para saber cuándo es creciente y cuándo es decreciente? Justifícalo y haz aplicación a la función $y = x^2 - 1$
-

22

PROBLEMAS:

- 1º.- Dada la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$, determinar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada, que pasa por el punto (1, 4).
- 2º.- Estudiar y representar gráficamente la función $y = 2x^3 - 24x + 7$.

CUESTIONES:

- a) Dada la función $y = \frac{x+2}{x^2-9}$, ¿presenta alguna discontinuidad? Razona la respuesta.
- b) ¿Cómo calcular seno de 75º en función de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 45º? Hazlo razonadamente.
- c) ¿Cuál es, y por qué, la condición de perpendicularidad de dos rectas dadas por sus ecuaciones?.
- d) ¿Hay máximo o mínimo en la función $y = x^3$ en el origen de coordenadas? Razona la contestación y haz la gráfica.
-

23

PROBLEMAS:

1º.- Dada la sucesión $\frac{n^2 - 1}{n}, n, \frac{n^2 + 1}{n}, \frac{n^2 + 2}{n}, \dots$ en la que n es un número natural, hallar:

- 1) El enésimo término y la suma de los n primeros términos.
- 2) El valor de n para que esta suma sea 51.

2º.- Se tiene un ángulo recto XOY. Sobre los ejes OX y OY, se consideran, respectivamente, los puntos variables A y B. Suponiendo que estos puntos se mueven de manera que se verifique $OA+OB=4$ dm., expresar el área del triángulo OAB en función de $x=OA$, y representar gráficamente la variación de esta función.

CUESTIONES:

- a) Define límite de una función. Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.
 - b) ¿Puede ser el seno de un ángulo mayor que la unidad? ¿Por qué? Estudia la variación de la función $\sin x$, en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)$.
 - c) Deduce la ecuación normal de la recta. Aplícalo al caso $a=60^\circ$ y $p=3$, en donde p es la distancia del origen a la recta, y a el ángulo que p forma con OX.
 - d) ¿Cuál es la derivada de $y=l f(x)$? Dedúcelo. Calcula la derivada y simplifica el resultado de $y = l \tan \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right]$
-

24

PROBLEMAS:

1º.- Dados $\log 2 = 0,301030$, $\log 3 = 0,477121$ y $\log 7 = 0,845098$, calcular el logaritmo de $\sqrt[3]{\frac{5625}{10976}}$

2º.- Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ y el eje de las y.

CUESTIONES:

- a) Manera de deducir la fracción generatriz de una decimal periódica pura, como $0,\overline{73}$, valiéndose de las propiedades de las progresiones geométricas.
 - b) Expresa las razones trigonométricas de un ángulo de 3500° mediante las de uno inferior a 45° . Razona la respuesta.
 - c) Estudia las posiciones relativas de una recta y una elipse dadas por sus ecuaciones. Razónalo.
 - d) ¿Cómo se hallan los puntos de inflexión de una función? ¿Qué significan gráficamente? Aplícalo a la función $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 10x + 8$.
-

25

PROBLEMAS:

1º.- Descomponer la fracción $\frac{x-1}{3x^2-7x+2}$ en la suma de dos fracciones $\frac{P}{x-a} + \frac{Q}{x-b}$. Es decir, determinar P, Q, a, b, de manera que esta suma sea idéntica a la fracción propuesta.

2º.- Derivar $y = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$, y simplificar el resultado.

CUESTIONES:

- Partiendo de la proposición: "Si se cumple H, se verifica I", enuncia la recíproca y las contrarias.
 - Construye un ángulo obtuso cuya tangente sea, en valor absoluto, triple del seno.
 - Halla sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el punto más alejado del (1, 0).
 - Halla las derivadas sucesivas de $y = \sin x$, y di cual es la ley de formación.
-

26

PROBLEMAS:

1º.- Determinar los valores de x e y en el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} \sin x + \sin y = 1 \\ 2x + 2y = \pi \end{array} \right\}.$$

2º.- Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = 3 \cdot (2x^2 - x^3)$ y el eje de abscisas.

CUESTIONES:

- ¿Cuál es la base del sistema de logaritmos neperianos? ¿Cuál es su valor? Dedúcelo.
 - ¿Recuerdas el teorema de la característica del logaritmo de un número menor que la unidad? Justifícalo.
 - ¿Cómo se halla la distancia de un punto a una recta analíticamente? Deduce la fórmula y aplícala al caso de ser P(0, 1) y la recta $x - y - 1 = 0$.
 - ¿Qué son derivadas sucesivas de una función? Observa la ley que siguen las sucesivas derivadas de la función $y = \frac{1+z}{1-z}$, y escribe su décima derivada.
-

27

PROBLEMAS:

1º.- Determinar los valores de x que verifican simultáneamente las igualdades:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} a &= \frac{3x+2}{5} \\ \operatorname{sec} a &= \frac{5}{6x+2}\end{aligned}$$

2º.- La recta $2y-x-4=0$ corta al eje de ordenadas y a la bisectriz del primer cuadrante en los puntos A y B, respectivamente. Se pide:

- 1) La ecuación de la mediatriz del segmento AB.
- 2) La ecuación de la recta simétrica de la mediatriz anterior, respecto del eje OX

CUESTIONES:

- a) Comprueba que las expresiones $x^2 - 2x + 1$, $x^2 + 1$ y $x^2 + 2x + 1$ están en progresión aritmética y calcula el quinto término. Razónalo.
 - b) ¿Qué es esperanza matemática? Pon un ejemplo que aclare la respuesta.
 - c) Si tienes la ecuación reducida de una curva $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$, ¿qué harás para determinar los focos de esta cónica? Justifícalo.
 - d) Deduce la derivada de $y = \arctan x$.
-

28

PROBLEMAS:

1º.- Determinar una progresión geométrica, tal que la suma de los tres primeros términos sea 63 y la diferencia del primero y tercero igual a 45.

2º.- Una recta determina sobre la parte positiva de los ejes coordenados OX y OY, segmentos iguales a 3 y 5. Otra, perpendicular a ella por el punto P(1, 2), forma con la primera y con la bisectriz del primer cuadrante un triángulo. Hallar su área.

CUESTIONES:

- a) ¿Cuándo se dice que una función $f(x)$ es continua para un cierto valor de $x=x_0$? ¿Es continua la función $y = \tan x$ para todo valor de x ? Justifica tu contestación.
 - b) En la potenciación de números complejos, ¿cuál es la fórmula de Moivre? Dedúcela.
 - c) Si conoces las coordenadas de un punto $P(x_0, y_0)$ en un plano, ¿cuál es la ecuación del haz de rectas que tiene por vértice aquel punto? Y si conoces dos rectas de ese haz, $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, ¿cuál es la ecuación del haz sin necesidad de hallar el vértice? Justifícalo.
 - d) ¿Cómo se hallan los mínimos de una función? Justifica tu respuesta. ¿Los tiene $y = \ln x$? ¿Y la función $y = 2x^2 + 1$?
-

29

PROBLEMAS:

- 1º.- Dividir la unidad en cuatro partes, de tal modo que estén en progresión aritmética y la suma de sus cuadrados sea 0,3.
- 2º.- Hallar el volumen del cuerpo engendrado por el segmento menor que el eje OX determina sobre la circunferencia de centro $C(-2, -1)$ y radio igual a 3, al girar alrededor de dicho eje.

CUESTIONES:

- a) ¿Qué es función de una variable? ¿Cómo se clasifican las funciones? ¿Cuál es el campo de existencia de la función $y = \sqrt{\frac{25}{x^2} - 1}$.
- b) ¿A quién es igual el cuadrado de un lado de un triángulo en función de los otros dos y del ángulo opuesto? Deduce su expresión y prepara la fórmula logarítmicamente.
- c) ¿Cuál es la ecuación de la tangente a una línea en un punto? Justifícalo y aplícala a la línea $y^2 = 2x^2 - 4$ en los puntos de ordenada 0..
- d) ¿A qué se llaman puntos singulares de una curva? ¿Sabes determinarlos? Aplícalo a $y = 4x^3 + 2x^2 - 1$.
-

30

PROBLEMAS:

- 1º.- Dos círculos tangentes exteriormente tienen por radio 9 cm y 3 cm respectivamente. Calcular los lados y los ángulos del triángulo formado por las tangentes comunes a las dos circunferencias.
- 2º.- Descomponer el número positivo a en dos partes, x e y , tales que la suma $x^2 + 3y^2$ tenga el valor mínimo, y calcular este valor.

CUESTIONES:

- a) Escribe el término n -ésimo de la serie $1,4 + 3,6 + 5,8 + 7,10 + \dots$ y explica cómo lo has formado.
- b) Comprueba que $\tan x = \cotg x - \cotg 2x$.
- c) Escribe la ecuación canónica de la elipse. Define su excentricidad y di entre qué valores está comprendida. ¿Qué son círculos directores de una elipse? Halla las ecuaciones de sus circunferencias.
- d) Calcula $\int \sqrt[3]{x} \cdot dx$.
-

31

PROBLEMAS:

1º.- El ángulo C de un triángulo mide 60° . Calcular los ángulos A y B del mismo, sabiendo que

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = \frac{3}{2}.$$

2º.- Dada la curva $y = -\frac{x^2}{4} - 2x + 12$, se pide:

1º - Las ecuaciones de las tangentes en los puntos de intersección con los ejes coordenados.

2º - El área del triángulo que forman dichas tangentes.

CUESTIONES:

- ¿Cuál es el logaritmo de $\frac{1}{243}$ en base $\frac{1}{3}$? Razónalo.
 - Deduce de la forma binómica la expresión trigonométrica de un número complejo. Calcula el módulo y el argumento de $\frac{1-i}{1+i}$.
 - ¿Cómo se halla analíticamente la distancia de un punto a una recta? Deduce la fórmula correspondiente.
 - ¿Qué se entiende por derivada de una función en un punto? Calcula la derivada de la función $y = \arctan 3x$ para $x=2$.
-

32

PROBLEMAS:

1º.- El complejo $3-2i$ es una raíz de una ecuación de segundo grado. Se pide hallar la otra raíz y la ecuación reducida correspondiente.

2º.- Una hoja de papel impreso debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno, y los laterales, 1 cm. Se piden las dimensiones de la hoja para las cuales el gasto de papel es mínimo.

CUESTIONES:

- ¿Qué es el logaritmo neperiano de un número? ¿Cómo se pasa de logaritmos decimales a neperianos? Justifícalo.
 - Deduce la fórmula de $\tan \frac{x}{2}$ en función de $\tan x$.
 - ¿Cuál es la ecuación general de las rectas que pasan por un punto? Dedúcela y haz aplicación para la determinación de la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -5)$ y es perpendicular a la bisectriz del cuarto cuadrante.
 - ¿Cómo calcularías el área comprendida entre el eje OX y la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$?
-

33

PROBLEMAS:

1º.- El límite de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es $\frac{5}{2}$ y la diferencia entre los dos primeros términos es $\frac{8}{5}$. ¿Cuál es la razón y el primer término de la progresión?

2º.- Calcular por integrales el volumen que engendra la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$, al girar sobre su eje mayor, juntamente con el recinto plano que limita.

CUESTIONES:

- ¿Cómo calcularías el logaritmo neperiano de un número cuando conoces su logaritmo decimal?.
 - ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de dos ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$ radianes? ¿Por qué?
 - ¿Qué son las rectas $Ax+By+C=0$ y $Bx-Ay+C'=0$? Justifica con todo detalle la respuesta.
 - Derivada del cociente de dos funciones .
-

34

PROBLEMAS:

1º.- El primer término de una progresión aritmética es 3, la razón 2 y la suma de los n primeros términos de la progresión es 10200. Hallar el valor de n.

2º.- Hallar la ecuación de la parábola que tiene su eje paralelo al Y, su vértice es el punto (1,-1) y pasa por el punto (2, 2), así como las ecuaciones de la tangente y de la normal en este punto.

CUESTIONES:

- Define probabilidad de un suceso. ¿Qué valores extremos puede tomar? Explícalo.
 - ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas del ángulo $\pi+a$ y las del ángulo a? Explica razonadamente tu respuesta.
 - Siendo C una constante, ¿cuál es la representación gráfica de la función $y=C$? ¿Y la de $xy=C$?
 - La función $2x+5$ tiene infinitas funciones primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de entre estas funciones toma el valor 18 para $x=2$? Explícalo .
-

35

PROBLEMAS:

- 1º.- El producto de cinco números en progresión aritmética es 12320, y su suma, 40. Hallar estos números.
- 2º.- Dada la función $y = x^3 - x - 6$, hallar: 1º, la ecuación de la tangente a la curva representativa de la función en su punto de intersección con el eje OY; 2º, la misma cuestión para el punto de abscisa $x=2$, y 3º, el área comprendida entre la curva, el eje OX y la ordenada correspondiente al máximo de la función.

CUESTIONES:

- a) ¿Cuál es la ley de formación de las potencias sucesivas de i ? Calcula i^{27912} .
- b) Transforma en producto $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$, y en suma de senos, $\operatorname{sen} a \cdot \cos b$.
- c) La curva $y = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen} 3x$, ¿pasa por el origen? ¿Cuál es su pendiente en ese punto?.
- d) Área limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje OX, entre 0 y π .
-

36

PROBLEMAS:

- 1º.- El producto de los seis primeros términos de una progresión geométrica es $\sqrt{a^{21}}$, y el primer término, \sqrt{a} . Hallar el último término y la razón.
- 2º.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0, 1), (5, 1) y (2, -3).

CUESTIONES:

- a) Define interés compuesto y deduce su fórmula.
- b) En la determinación del módulo de un complejo, ¿interviene el signo de sus componentes? ¿Y en la del argumento? Razona la respuesta.
- c) ¿Qué es excentricidad de una cónica? Clasifica éstas según el valor de su excentricidad. Considera el caso particular de que ésta sea igual a cero.
- d) El hecho de que se anule la derivada primera en los máximos y mínimos, ¿es condición suficiente? Razona la respuesta y acláralo con un ejemplo.
-

37

PROBLEMAS:

- 1º.- Encontrar una progresión geométrica de tres términos, sabiendo que su suma es 156, y la suma de esos términos, respectivamente multiplicados por 1, 2 y 3 es 408.
- 2º.- La ecuación de una parábola de eje paralelo al de ordenadas toma la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Calcula a, b y c, sabiendo que pasa por el punto (1, -1) y que su vértice es el punto (2, -3).

CUESTIONES:

- a) Estudia el binomio de Newton y aplícalo al cálculo del término octavo del desarrollo $(x^2 - 5 \cdot y^3)^{12}$
- b) El afijo A de $(3+4i)$ gira 90° alrededor del origen de coordenadas en el sentido de las agujas del reloj. ¿Cuáles son las componentes del número complejo, cuyo afijo es la nueva posición de A? Justifica la respuesta.
- c) ¿Cómo determinas el centro y el radio de la siguiente circunferencia ? $x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 10 \cdot y = 10$. Explícalo.
- d) ¿Cuál es la derivada de $y = \arcsin x$? Dedúcela.
-

38

PROBLEMAS:

- 1º.- En el voladizo de la figura adjunta, los triángulos ABC y AEC son rectángulos e iguales. Siendo $ED=EC$, $BC=3$ m, y $CA=7$ m. Calcula el área del triángulo CED.
- 2º.- Entre los rectángulos de 4 m de perímetro, determinar el de diagonal mínima.

CUESTIONES:

- a) Define límite de una sucesión de números reales. Pon un ejemplo de sucesión monótona decreciente, cuyo límite sea 3.
- b) ¿Cuántos valores tiene la $\sqrt{-i}$? Calcúlalos.
- c) ¿Cómo hallarías la ecuación de una recta que pasando por un punto forme un ángulo dado con otra recta? Razónalo. Aplícalo al caso de la recta que corta al eje OY en el punto (0, -2) y forma con el sentido positivo del eje OX un ángulo de 120° .
- d) ¿Cuál es la derivada de la función exponencial? Dedúcela.
-

39

PROBLEMAS:

- 1º.- En la potencia $(1+i)^{20}$, calcula: 1º) el término medio; 2º) el módulo y el argumento de la potencia, sin desarrollarla.
- 2º.- Los puntos A(6, 2) y B(14, 8) son los extremos de un segmento. Un caminante que sigue la recta representada por la ecuación $x-y=10$, desea saber desde qué puntos de dicha recta verá el segmento AB bajo un ángulo recto.

CUESTIONES:

- a) Si $\log x = -2,358426$, ¿qué debes hacer para hallar x ?
- b) Partiendo de la expresión $(\cos x + \sin x)^3$, ¿sabes obtener $\sin(3x)$ en función de $\sin x$ y $\cos x$?
- c) Conocida la ecuación de una circunferencia, explica razonadamente el modo de hallar su centro y su radio. Aplícalo a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$
- d) Si la suma de dos números es la constante a , ¿cuándo será máximo su producto? Razona la respuesta.
-

40

PROBLEMAS:

- 1º.- En una finca de monte hay dispersas varias casetas de guardas, cada una de las cuales está unida a cada una de las restantes por un camino. Calcula el número de casetas que hay, sabiendo que el número de caminos es 36.
- 2º.- Se desea dibujar un sector circular de 20 cm de perímetro que tenga la mayor área posible. Calcula el radio, el arco (en radianes y en grados), y el área del sector.

CUESTIONES:

- a) Define frecuencia relativa y probabilidad. ¿Existe alguna relación entre ellas?
- b) La secante de un ángulo, ¿puede tener cualquier valor real? Razona la respuesta.
- c) ¿Puede medir 0,8 la excentricidad de una hipérbola?. Razona la respuesta.
- d) ¿Es lo mismo el incremento de una función que su diferencial? Razona la respuesta.
-

41

PROBLEMAS:

- 1º.- En una progresión geométrica de 91 términos, los extremos son 5 y 230. Halla la suma de los términos impares de dicha progresión.
- 2º.- Determina las coordenadas del circuncentro de un triángulo cuyos vértices son A(2, 2), B(-2, 2) y C(-2, -2).

CUESTIONES:

- a) ¿Cómo calcularías $\log_5 4$, sabiendo que $\log 2 = 0,301030$?
- b) ¿Cuántas son las relaciones fundamentales que ligan entre sí las seis razones trigonométricas de un arco? ¿Por qué? Dedúcelas, analítica y geoméricamente.
- c) ¿Cómo calculas la distancia entre dos puntos dados por sus coordenadas? Deduce la fórmula y halla la distancia del punto (2, 1) al de abscisa 3, situado en la bisectriz del primer cuadrante.
- d) ¿Cuánto vale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$? Justifícalo.
-

42

PROBLEMAS:

- 1º.- En una progresión aritmética de razón 1, el número de sus términos es divisible por 3. Forma la progresión, sabiendo que la suma de sus términos es 33 y que el término que ocupa el lugar $n/3$ es igual a 4.
- 2º.- Estudia y representa gráficamente la función $y = x^4 - 5x^2 + 4$

CUESTIONES:

- a) Define el número e. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}$. Razona la respuesta.
- b) Transforma en producto la expresión $\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$. Razona lo que hagas.
- c) La ecuación $2 \cdot x^2 - 5 \cdot x \cdot y - 2 \cdot y^2 = 0$ representa un par de rectas. ¿Cómo hallas sus coeficientes angulares?
- d) ¿Qué indica el signo de la segunda derivada de una función respecto del sentido de la concavidad de la curva representativa?
-

43

PROBLEMAS:

- 1º.- En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero, y el producto de todos los términos es $4\sqrt{2}$. Hallar la progresión.
- 2º.- Determina a, b, c y d de modo que la curva $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ presente un máximo y un mínimo en (0, 4) Y (2, 0), respectivamente.

CUESTIONES:

- a) Conociendo el logaritmo neperiano de un número, ¿cómo podría calcularse su logaritmo decimal? Justifícalo.
- b) Deduce el seno de la mitad de un ángulo, en función del coseno de dicho ángulo. ¿Es lo mismo el seno de la mitad de un ángulo, que la mitad del seno del mismo ángulo?
- c) Deduce la ecuación de la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.
- d) Si una función continua tiene un máximo y un mínimo relativos, ¿puede ser el valor del mínimo, mayor que el que corresponde al máximo? Razona la respuesta mediante una gráfica, y pon un ejemplo.
-

44

PROBLEMAS:

- 1º.- En una progresión geométrica de ocho términos, el cuarto es 480, y la suma de los logaritmos de todos los términos vale $8 + 8 \cdot \log 3 + 36 \cdot \log 2$. Determina la progresión.
- 2º.- Calcula por integración:
- 1º El área del triángulo de vértices (3, 0), (6, 3) y (8, 0).
- 2º El volumen que engendra dicho triángulo, al girar alrededor del eje OX.

CUESTIONES:

- a) ¿Cuándo se dice que una función es inversa de otra? Halla la función inversa de $y = \ln(1 + \sqrt{x})$.
- b) Si $\tan A = 3$, ¿sabrías calcular el valor de $\cos(90^\circ - A)$? Explícalo.
- c) ¿Recuerdas la ecuación reducida de la elipse?. Dedúcela.
- d) ¿Cuál es la derivada de $\log_a x$? Aplícalo al cálculo de la derivada de $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
-

45

PROBLEMAS:

1º.- En una vasija hay 11 litros de vino. De ella se extrae 1 litro y se agrega 1 litro de agua. De la mezcla se vuelve a sacar 1 litro, agregando otro de agua. Realizada esta operación tres veces, calcula la cantidad de vino que queda en la vasija.

2º.- Hallar el valor real de la derivada de la función $z = 3 \cdot u^{1/3}$ para $x=0$, siendo $u=\ln(y)$, e $y=2x+e$.

CUESTIONES:

- ¿Cuál es el teorema de la unicidad del límite? Explícalo.
 - Deduca las razones trigonométricas de $2a$ en función de $\tan a$.
 - ¿Cómo deduces, a partir de la fórmula que expresa el ángulo de dos rectas, la condición de perpendicularidad o paralelismo de ellas? Justifícalo.
 - Si una función es inversa de otra, ¿lo son también sus derivadas? Explícalo con un ejemplo.
-

46

PROBLEMAS:

1º.- En un cuadrado se unen los puntos medios de sus lados y se obtiene otro cuadrado inscrito; en éste se realiza la misma operación y así se continúa indefinidamente. Calcula la suma de esa sucesión de cuadrados

2º.- Dado el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(1, 4)$ y $C(-1, 2)$, halla las coordenadas del punto de intersección de la mediana que parte de A con la altura que parte de B .

CUESTIONES:

- ¿Cuál es el valor de $\log_5 625$? Razona la respuesta.
 - ¿Hay ángulos cuya cosecante es $1/27$? Razona la respuesta.
 - Dada la ecuación de la recta $3x - 2y=4$, exprésala en la forma canónica, o sea, en función de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados.
 - Deduca razonadamente la derivada del seno.
-

47

PROBLEMAS:

- 1º.- En un olivar hay 51 líneas de olivos; la primera tiene 40 árboles, y cada una de las otras tiene dos árboles más que su anterior. Calcula el valor de la cosecha del olivar, teniendo en cuenta que el valor medio de la cosecha de un olivo se calcula en 100 pesetas.
- 2º.- Calcula el área del triángulo rectángulo de mayor superficie entre todos los que tienen la hipotenusa de 20 metros de longitud.

CUESTIONES:

- a) Deduce la relación que existe entre el logaritmo decimal de un número N y su logaritmo neperiano.
- b) Deduce la expresión general de todos los ángulos que tienen igual secante. Caso particular en que $\sec x = 2$.
- c) ¿Cómo averiguas si los puntos $A(2, -2)$, $B(-2, 1)$, $C(0, \frac{1}{2})$, están en línea recta o determinan un triángulo? Justifica la contestación.
- d) ¿Es necesario que una función sea continua en un punto para que tenga derivada en él? Razona tu contestación.
-

48

PROBLEMAS:

- 1º.- Hallar dos números complejos tales que su cociente sea imaginario puro y su diferencia igual a 10. La razón de las partes reales, del primero al segundo es igual a -4 .
- 2º.- Una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, pasa por el punto $P(1, 2)$, y es cortada por la recta $x - 4 = 0$. Halla el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor de su eje el segmento parabólico determinado.

CUESTIONES:

- a) ¿Qué diferencia existe entre anualidad de capitalización y de amortización? Deduce la fórmula de la primera.
- b) ¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas de dos ángulos opuestos? Justifícalo. ¿Qué relación existe entre $\tan 25^\circ$ y $\tan 335^\circ$?
- c) Dadas dos rectas por sus ecuaciones, estudiar razonadamente los casos de incidencia que puedan presentarse.
- d) ¿Cómo calculas la derivada de $y = e^{5x} \cdot \cos 2x$? Hazlo y explícalo.
-

49

PROBLEMAS:

- 1º.- Hallar el área de un polígono regular de 16 lados y de 10 m de radio, haciendo uso de fórmulas trigonométricas.
- 2º.- La superficie lateral de un barril está engendrada por un arco de elipse limitado por las paralelas al eje menor, equidistantes de él 6 dm, y que gira alrededor del eje mayor. Los semiejes de la elipse miden 3 dm y 7 dm. Halla la capacidad del barril.

CUESTIONES:

- a) Sabiendo que la sucesión $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{2n-1}{3n}$ tiene por límite $\frac{2}{3}$, determina el término de ella, a partir del cual su diferencia con el límite es en valor absoluto menor que $\frac{1}{10}$.
- b) ¿Cuál es la razón de la suma a la diferencia de los senos de dos ángulos? Dedúcela. Aplícalo al caso de valer los ángulos 105° y 15° , respectivamente.
- c) ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la ecuación general de segundo grado con dos incógnitas para representar una circunferencia? Justifícalo.
- d) ¿A quién es igual la derivada de un cociente de funciones? ¿Por qué? Aplícalo para hallar la derivada de $\tan x$.
-

50

PROBLEMAS:

- 1º.- Hallar el cociente $6 / (2 + 2i)$, analítica y gráficamente.
- 2º.- Estudio y representación gráfica de la función $y = \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 - 3x$

CUESTIONES:

- a) Si una progresión geométrica tiene un número impar de términos, ¿qué relación liga al término central con los dos extremos? Di en qué se funda y demuéstalo.
- b) Deduce las razones trigonométricas de $2a$ en función de $\tan a$.
- c) Dada la función $y=f(x)$, ¿cuál es la ecuación de la tangente a la curva representativa de dicha función, en el punto de abscisa x_1 ? Razona la respuesta.
- d) Si una función tiene derivada nula en un punto, ¿puede ser creciente o decreciente en este punto?. Razona la respuesta.
-